124769

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XVI.

—

ANUL 1936—1937

BIBL

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMÂNEASCĂ"
1937.

T 24769

ANUL XVI. 15 MARTIE 1936 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI, C. TEODORESCU: ANIVERSAREA A 15 ANI AI REVISTEI MATEMATICE DIN TIMISOARA.
2. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNI INTREGI ALE ECUATIUNII $x^2 - a y^2 = b$.
3. NOTE MATEMATICE: 1.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 253, 528, 1343, 1356, 1359, 1375
6. PROBLEME PROPUSE: 1464-1471.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTEC[illegible]STRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2463

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVI, care începe la 15 Martie 1936.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor şi Sub-Director la Şc. Politechnică din Bucureşti, Mateiu Voevod 25, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor-Inginer. Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universltatea din Bucureşti.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Profesor la Şcoala Sup. de Arte şi Meserii, Asistent pe lângă catedra de Technologie, Şc Polit. Timişoara.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
13. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit Timişoara.
14. **Balazs D.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă dela Şc. Polit. Timişoara, str. Gen. Joffre 12.
15. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit. Timişoara, str. Doja 51.
16. **Banciu I.** Prof., Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 95, Bucureşti.
17. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
18. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
19. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
20. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit, Timişoara.
21. **Bonca I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Topografie şi Geodezie Şcoala Politechnică, Timişoara.
22. **Botea N. G.** Licenţiat în Matematici, Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti, Calea Floreasca 46, Bucureşti 3.
23. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
24. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
25. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj.
26. **Breazu D.** Profesor de liceu, Bucureşti.
27. **Buicliu Gh.** General de brigadă din Artilerie. Fost 10 ani profesor de Geometria Analitică la Şcoala Politecnică din Timişoara, Directorul Direcţiei Chimice Militare, Str. Dr. Lister 5, Bucureşti 6.
28. **Câlniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit. Timişoara.
29. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie, la Şc. Politechnică din Timişoara.
30. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şcoala Polit din Timişoara.
31. **Claudian Virgil** Licenţiat în matematici, profesor la Şcoala Normală din Galaţi.
32. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
33. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga, Profesor onorofic la Şc. Politechnică din Timişoara, Preşedintele Comisiei Interimare al Municipiului Timişoara.
34. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T-Măgurele.
35. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din Tecuci.
36. **Constantinescu Gh.** Profesor, la lic. Lazăr, Bucureşti.
37. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
38. **Costăchescu D. C.** Sub-Lt de Marină, Constanţa.
39. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
40. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
41. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice dela Şc. Polit., Timişoara.
42. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Sub-director la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
43. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
44. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
45. **Dumitriu-Dada** Profesor la Colegiul Carol I. Craiova.
46. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
47. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
48. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
49. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mecanică dela Şc. Polit., Timişoara.

50. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
51. **Ghiţescu Spiridon** Profesor secundar, Mizil.
52. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
53. **Ionescu-Biss H. P.** Profesor la liceul din Oltenita.
54. **Ionescu C-tin Bujor** Licenţiat în Matematiei, Profesor. Str. Maior Popescu Gh 26, Bucureşti.
55. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locotenent, str. Popa-Tatu 17, Bucureşti.
56. **Iorgulescu T.** Licenţiat în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Geologie dela Şc. Polit., Timişoara
57. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
58. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit. Timişoara.
59. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică. Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.
60. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
61. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
62. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
63. **Liteanu Gh.** Colonel de Artilerie, Str. L. Carageale 30, Bucureşti.
64. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
65. **Macovski Eug.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
66. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
67. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, Timişoara.
68. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
69. **Marinescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
70. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Geologie dela Şc Polit., din Timişoara.
71. **Mihaiu Emil** Profesor la Şc. Sup. de Comerţ din Timişoara.
72. **Mihăileanu N. N.** Profesor secundar, Bucureşti.
73. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă dela Şcoala Polit, Timişoara.
74. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul „C. Diaconovici-Loga, Asistent pe lângă Catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit. din Timişoara.
75. **Murgulescu Elena** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şc. Polit, din Timişoara.
76. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
77. **Nadaşan Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şc. Polit. din Timişoara.
78. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. Sf. Sava, Bucureşti.
79. **Niculescu Gh.** Comandor, Inginer, Str. Izvor 98, Bucureşti.
80. **Niculescu Miron** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi.
81. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti. Str. Racoviţă 32, Bucureşti.
82. **Nicolau A.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara, Directorul Uzinei Electrice Craiova.
83. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
84. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
85. **Onicescu O.** Doctor în Matemătici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
86. **Orăşeanu C.** Inginer şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
87. **Orăşeanu Gr.** Profesor secundar, Bucureşti.
88. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
89. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Polit., Bucureşti.
90. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şcoala Politechnică din Timişoara.
91. **Protopopescu I.** Inginer Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
92. **Purcariu I.** Director-General al Invăţământului Profesional din Ministerul Instrucţiunii Publice Bucureşti.
93. **Racliş N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor, Bucureşti
94. **Rădulet R.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
95. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
96. **Sauciuc L.** Licenţiat în chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
97. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara, Directorul Şcoalei P. T. T. Timişoara.
98. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj
99. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Subdirectorul Tracţiunii C. F. R. Profesor şi Decan la Şc. Polit. din Timişoara.
100. **Simionescu Gh. D.** Licenţiat în Matematici, Profesor la lic. Militar din Târgovişte.
101. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân Martin.
102. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
103. **Stambuleanu A.** Doctor-Inginer la C. F. R. Timişoara.

(Continuare în pagina cu „Informaţiuni".)

ANUL XVI — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

ANIVERSAREA A 15 ANI AI REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA

DE

V. ALACI şi C. TEODORESCU

Cu acest număr Revista Matematică din Timişoara începe anul XVI-lea, după ce a împlinit vârsta de cincisprezece ani.

Apariţia Revistei noastre coincide cu înfiinţarea Şcoalei Politehnice din Timişoara, nou institut de cultură românească, înfiinţat în provincia Banatului, îndată după marea Unire. *Traian Lalescu*, întemeietorul Şcoalei Politehnice, întemeiază în Martie 1921 şi *„Revista Matematică din Timişoara"*, destinată a pregăti pe tinerii care se dedică studiilor technice, studii la care pregătirea matematică are o mare importanţă.

In cuvintele care începea primul număr, *Traian Lalescu*, arăta scopul acestei reviste şi dându-i sborul, lăsa ca viitorul să hotărească dacă ea se va menţine, corespunzând unei necesităţi. Revista Matematică din Timişoara s'a menţinut, ea a apărut regulat în acesti cincisprezece ani, şi acum este una din cele mai vechi şi mai statornice reviste din Banat.

Mult a ţinut *Traian Lalescu* ca pe coperta revistei să fie numele oraşului care o adăposteşte, a oraşului care a dorit şi a stăruit să aibă o şcoală politehnică, care poartă şi ea acelaş nume. Ca bănăţean şi luptător pentru cauza Banatului în timpurile când se făureau tratatele care au consfinţit drepturile românilor pe aceste locuri, el era foarte legat sufleteşte de toată activitatea acestei regiuni.

Primul număr este pregătit în întregime de *Lalescu*, care pune apariţia revistei în legătură cu frumoasa tradiţie creiată de *Gazeta Matematică*. D-l *Ion Ionescu* unul din stâlpii Gazetei Matematice scrie un articol despre parabolă, şi patru probleme alese spre indrumare tot din Gazetă, servesc ca model pentru noua revistă. Cadrul astfel fixat la primul număr a rămas neschimbat, ca şi sufletul animator care conduce viaţa revistei.

Revista Matematică din Timişoara nu are un scop lucrativ, nu realizează câştiguri, nu plăteşte salarii sau beneficii colaboratorilor. Primul număr a fost tipărit de *Lalescu* pe socoteala sa şi de atunci or-ce contribuţie la revistă este onorifică. Tiparul este însă scump şi revista luptă cu mari greutăţi pentru a se menţine.

Incă dela început revista a fost pusă sub conducerea unui comitet compus din profesorii şcoalei politehnice, la care s'au adăogat profesori, ingineri, ofiţeri din toată Ţara, aşa în cât numărul acelora care sprijină moral şi material revista, a crescut an de an.

Cu stăruinţă s'a realizat apariţia regulată, îngrijirea materialului de redacţie, pregătirea problemelor, administraţia şi expedierea ei, muncă migăloasă dar făcută cu plăcere pentru scopurile frumoase pe care ea le serveşte. Am văzut astfel tinerii care începeau studiile lor matematice încercându-şi puterile la problemele propuse, prezentându-se la examenul de intrare în şcoala noastră, devenind studenţi foarte buni şi astăzi, ingineri, directori de întreprinderi. Alţii care s'au îndreptat în alte părţi, devenind elemente de valoare în toate ramurile.

Căci ştiinţa matematică este o armătură puternică pentru cei ce o posedă, care serveşte la cercetarea profundă a legilor naturii, care întăreşte raţionamentul şi formează caracterul.

Iată ce spunea între altele, d-l profesor *Ţiţeica*, într'o minunată cuvântare, ţinută cu prilejul sărbătorirei de 40 de ani a-i „Gazetei Matematice" din

Bucureşti, sărbătorire la care a luat parte cu toată căldura şi revista noastră:

„Mi s'a întâmplat, acum un an, să admir templul lui Neptun de la capul Sunion şi am avut impresia puternică şi reală că în bătaia razelor piezise, marmora rece şi rigidă a coloanelor se încălzeşte şi vibrează. Aşa se încălzeşte şi vibrează Matematica în bătaia razelor de inteligenţă ale tineretului, care la rândul lui simte o plăcere inaltă, limpede, aproape mistică. Aci stă marea putere educativă a ştiinţelor matematice pentru tineret: ştiinţă curată pentru suflete curate, ştiinţă cristalină pentru suflete cristaline. Atingerea sinceră cu matematica lasă urme adânci. Lasă inclinarea permanentă de a urma în orice împrejurare linia dreaptă. Lasă năzuinţa către ideal şi către perfecţiunea desăvârşită. In orice caz aceia care s'au iniţiat cât de puţin în tainele ştiinţelor matematice rămân cu o disciplină intelectuală, cu acel simţ deosebit al măsurii care a caracterizat şi gândirea şi scrisul clasic al lui Descartes şi al lui Pascal".

Voi tinerii de pe băncile şcolii, pătrundeţi-vă de aceste adevăruri elementare. Pregătiţi-vă pentru câştigarea cunoştinţelor matematice, lucraţi cu râvnă, stăruinţă şi entuziasm. Toate această muncă va fi folositoare mai tâ ziu, când pregătiţi cu raţionamentul şi disciplina matematică, veţi putea urmări cu succes studiile ştiinţifice în or-ce direcţie vă veţi îndrepta.

SOLUŢIUNI ÎNTREGI ALE ECUAŢIUNII

$$x^2 - a y^2 = b$$

De Prof. Gh. Constantinescu

Atât *Euler* cât şi *Lagrange* s'a ocupat în special de această problemă.

1. *Euler* a găsit cu ajutorul fracţiunilor continue toate soluţiunile întregi ale ecuaţiei $x^2 - a y^2 = 1$ şi a încercat să dovedească că această ecuaţie are soluţiuni, ori care ar fi a, însă demonstraţia nu este completă.

Pentru rezolvarea ecuaţiei $x^2 - a y^2 = b$ *Euler* arată, că dacă ecuaţia are o soluţie particulară x_1, y_1 atunci soluţiile generale vor fi:

$$x = u x_1 \pm a v y,$$
$$y = u y_1 \pm v x_1,$$

unde u şi v sunt soluţiuni ale ecuaţiei:

$$u^2 - a v^2 = 1.$$

2. *Lagrange* a demonstrat în mod riguros existenţa unei soluţiuni întregi a ecuaţiei:

$$x^2 - a y^2 = 1,$$

ori care ar fi a, afară de cazul când a este un pătrat perfect.

Pentru rezolvarea ecuaţiei $x^2 - a y^2 = b$ *Lagrange* face transformata:

$$x = n y + b z,$$

unde sunt 2 parametri arbitrari n şi z cărora le pune însă două condiţiuni.

Ecuaţia devine:

$$\frac{n^2 - a}{b} y^2 + 2 n y z + b z^2 = 1.$$

Insemnăm cu n_1 valoarea lui n pentru care avem:

$$\frac{n_1^2 - a}{b} = m_1$$

şi deci ecuaţia devine:

$$m_1 y^2 + 2 n_1 y z + b z^2 = 1.$$

Dacă această ultimă ecuaţie are soluţii întregi, atunci şi ecuaţia propusă va avea soluţiuni întregi.

Această ultimă ecuaţie, se reduce prin substituţii modulare, în cazul când are soluţii la ecuaţia:

$$u^2 - a v^2 = 1,$$

studiată complect de *Lagrange*.

3. Soluţia dată de *Euler* nu este generală de cât în anumite cazuri.

Cazul 1. Când b este un număr prim absolut ca în exemplu:

$$x^2 - 7 y^2 = 29,$$

este de ajuns soluţia particulară:

$$x_1 = 6, \qquad y_1 = 1,$$

pentru ca formulele:

$$x = 6 u \pm 7 v,$$
$$y = 6 v \pm u,$$

să dea toate soluţiile ecuaţiei.

Cazul 2. Când $b = b_1 . b_2$, unde ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} m x^2 - n y^2 &= b_1 \\ m x^2 - n y^2 &= b_2 \end{aligned}\right\}, \qquad m n = a$$

nu au soluţiuni întregi, ca în exemplu:

$$x^2 - 39y^2 = 10$$

unde soluţia particulară $x_1 = 7$, $y = 1$ e suficientă, ca prin formulele:

$$x = 7u \pm 39v$$
$$y = 7v \pm u$$

să avem toate soluţiile ecuaţiei.

Cazul 3. In toate celelalte cazuri, formulele lui *Euler* nu mai sunt generale, ca în exemplu:

$$x^2 - 7y^2 = 57,$$

unde ne trebue două soluţiuni particulare:

$$x_1 = 8 \quad y_1 = 1 \qquad \text{şi} \qquad x_2 = 13 \quad y_2 = 4\ ,$$

astfel ca prin formulele:

$$x = 8u \pm 7v \qquad x = 13u \pm 28v$$
$$y = 8v \pm u \qquad y = 13v \pm 4u\ ,$$

să avem toate soluţiile problemei.

4. Despre această insuficienţă a formulei lui *Euler*, ştia şi *Lagrange*, fapt ce la determinat să se ocupe de această ecuaţie şi să dea soluţiunea de mai sus.

Procedeul lui *Lagrange*, a fost considerat în timp de aprope un secol şi jumătate ca cel mai practic, care dă soluţiile generale ale ecuaţiei:

$$x^2 - ay^2 = b,$$

însă nici acest procedeu al lui *Lagrange*, nu dă soluţiile generale, fapt ce-l voi dovedi în modul următor:

In transformata:

$$x = ny + bz.$$

Lagrange a presupus că x rămâne întreg numai pentru valorile lui y şi z întregi, dar x rămâne întreg şi pentru valorile întregi ale lui y şi fracţionare ale lui z, şi anume pentru acele valori fracţionare ale lui z, cari au ca numitor un divizor al lui b.

Dacă punem $b = b_1 b_2$, x rămâne întreg şi pentru:

$$z = \frac{z'}{b_1}, \quad \text{sau} \quad \frac{z'}{b_2}.$$

In acest caz transformata şi ecuaţia devin:

$$x = ny + b_2 z'$$
$$b_1 m_1 y^2 + 2n_1 b_1 y z' + b_2 z'^2 = b_1,$$

ecuaţie care este mai complicată de cât aceia de la care plecase *Lagrange*.

Un exemplu ne va lămuri aceasta insuficienţă a formulei lui *Lagrange*.

La ecuaţia:

$$x^2 - 7y^2 = 57,$$

aplicăm transformata lui *Lagrange*:

$$x = ny + 57z,$$

şi găsim:

$$\frac{n^2 - 7}{57} y^2 + 2nyz + 57z^2 = 1.$$

Expresiunea $\frac{n^2 - 7}{57}$ devine întreagă pentru:

$$n_1 = \pm 8 \text{ şi } n_2 = \pm 11.$$

Pentru $n_1 = 8$ ecuaţia devine:

$$y^2 + 16yz + 57z^2 = 1,$$

care prin transformata modulară, singurile permise:

$$y = y_1 - 8z_1$$
$$z = z_1$$

devine:

$$y_1^2 - 7z_1^2 = 1.$$

Insemnând cu u şi v soluţiile acestei ecuaţii, vom găsi:

$$x = 8u \pm 7v$$
$$y = 8v \pm u,$$

soluţiuni pentru ecuaţia $x^2 - 7y^2 = 57$.

Insă x din transformată rămâne întreg şi pentru $z = \frac{z'}{3}$ şi în acest caz ecuaţia devine:

$$3y^2 + 48yz' + 19z'^2 = 3.$$

Studiată această ecuaţie, ea admite soluţiile ecuaţiei:

$$y^2 + 16yz + 57z^2 = 1,$$

dar mai admite şi soluţiile:

$$y = 13v \pm 4u$$
$$z' = 4v \pm u,$$

cari înlocuite în transformată, dau:

$$x = 13u \pm 28v$$
$$y = 13v \pm 4u$$

soluţiuni cari nu au fost găsite de *Lagrange*.

E adevărat că dacă înlocuim pe n cu a 2-a valoare găsită *11*, găsim cu ajutorul formulei lui

Lagrange şi aceste soluţiuni, însă aceasta nu ne dovedeşte că la alte exemple s'ar putea întâmpla tot aşa.

Rezultă deci că formula lui *Lagrange* nu este complect demonstrată.

5. In cele ce urmează voi demonstra câteva teoreme cu ajutorul cărora vom complectă formulele lui *Euler* şi mai târziu voi arăta cum se găsesc toate soluţiile în mod geometric.

Din cauză că rezolvarea ecuaţiei $x^2 - a y^2 = b$ are multă asemănare cu ecuaţia $x^2 + a y^2 = b$, voi extinde teoremele şi asupra acestei ecuaţii.

6. Dacă ecuaţia $x^2 + a y^2 = b$ are două soluţiuni x_1, y_1 şi x_2, y_2, atunci numărul b nu este prim. Să presupunem că b este prim.

Din înmulţirea egalităţilor:

$$x_1^2 + a y_1^2 = b \quad \text{şi} \quad x_2^2 + a y_2^2 = b,$$

găsim:

$$(x_1 x_2 \pm a y_1 y_2)^2 + a (x_1 y_2 \mp y_1 x_2)^2 = b^2.$$

Rezultă că:

$$p = x_1 x_2 + a y_1 y_2 \qquad r = x_1 x_2 - a y_1 y_2$$
$$q = x_1 y_2 - y_1 y_2 \qquad s = x_1 y_2 + y_1 x_2,$$

sunt soluţiuni ale ecuaţiunei:

$$x^2 + a y^2 = b^2$$

să facem produsul $p r$, vom avea:

$$p r = x_1^2 x_2^2 - a^2 y_1^2 y_2^2,$$

sau:

$$p r = (b - a y_1^2)(b - a y_2^2) - a^2 y_1^2 y_2^2 =$$
$$b^2 - b a (y_1^2 + y_2^2).$$

Rezultă din acesta că, $p r$ va fi divizibil cu b, şi cum b este prim, rezultă că sau p sau r se împarte cu b.

Să presupunem că p se împarte cu b, vom avea deci, $p = b p_1$.

Cum p şi q sunt soluţiuni ale ecuaţiunei:

$$x^2 + a y^2 = b^2,$$

rezultă că şi:

$$q = b q_1,$$

şi ecuaţia devine:

$$p_1^2 + a q_1^2 = 1,$$

şi cum această ecuaţiune nu are altă soluţie de cât $p_1 = 1$ şi $q_1 = 0$, din care rezultă:

$$p = x_1 x_2 + a y_1 y_2 = 1$$
$$q = x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

Din valorea lui q găsim:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$ şi cum x_1, y_1 şi x_2, y_2

sunt prime între ele, rezultă că:

$$x_1 = x_2 \qquad \text{şi} \qquad y_1 = y_2.$$

Rezultă deci că, dacă numărul b este prim, ecuaţia $x^2 + a y^2 = b$, nu are de cât o singură soluţie.

7. Dacă ecuaţia $x^2 - a y^2 = b$ are o soluţie particulară $x_1 y_1$, ea va admite şi soluţiile:

$$x = u x_1 \pm a v y_1$$
$$y = u y_1 \pm v y_1,$$

unde u şi v sunt soluţiuni ale ecuaţiunei $u^2 - a v^2 = 1$.

Dacă numărul b este prim, soluţiile de mai sus sunt generale.

Prima parte a acestei proprietăţi se datoreşte lui *Euler*, cu deosebire că *Euler* credea că formulele sunt generale or care ar fi b.

Dacă înmulţim egalităţile:

$$x_1^2 - a y_1^2 = b \quad \text{şi} \quad u^2 - a v^2 = 1,$$

găsim:

$$(x_1 u \pm a v y_1)^2 - a (x_1 v \pm y_1 u)^2 = b,$$

din care se deduce că:

$$x = u x_1 \pm a v y_1$$
$$y = v x_1 \pm u y,$$

sunt soluţiuni ale ecuaţiunei:

$$x^2 - a y^2 = b.$$

Să presupunem că această ecuaţiune, ar mai avea o soluţie $x_2 y_2$, care să nu fie cuprinsă în formulele de mai sus.

In acest caz, ecuaţia $x^2 - a y^2 = b$, va mai avea şi următoarele soluţii:

$$x' = u x_2 \pm a v y_2$$
$$y = v x_2 \pm u y_2.$$

Din înmulţirea celor două egalităţi:

$$x^2 - a y^2 = b \quad \text{şi} \quad x'^2 - a y'^2 = b,$$

găsim:

$$(x x' \pm a y y')^2 - a (x y' - y x')^2 = b^2,$$

din care rezultă că:

$$p = x x' + a y y' \quad \text{și} \quad r = x x' - a y y'$$
$$q = x y' + y x' \qquad\quad s = x y' - a x x',$$

sunt soluțiuni ale ecuațiunei $x^2 - a y^2 = b^2$.

Din produsul $p r$, rezultă că p, este un multiplu a lui b, este deci de forma:

$$p = b p_1,$$

apoi se deduce că și:

$$q = b q_1,$$

unde p_1 și q_1 sunt soluțiuni ale ecuațiunei

$$p_1^2 - a q_1^2 = 1.$$

Din aceasta din urmă, deducem că $p_1 = u$ și $q_1 = v$ și deci:

$$p = x x' + a y y' = b u$$
$$q = x y' + y x' = b v.$$

Din aceste ultime două ecuațiuni scoatem valorile lui x' și y' și vom avea:

$$x' = u x - a v y$$
$$y' = v x - u y,$$

din care deducem că x' și y' fac parte din seria:

$$x = u x_1 \pm a v y_1$$
$$y = v x_1 \pm a y_1.$$

Rezultă deci că, dacă b este prim, ecuația nu are de cât un șir de soluțiuni.

8. De aci înainte ne vom ocupa numai de ecuația $x^2 - a y^2 = b$ și cele găsite, se vor raporta și la ecuația $x^2 + a y^2 = b$, cu deosebirea că la prima, vor fi șiruri de soluțiuni și la cea de-a doua soluțiuni izolate.

9. Ecuația $x^2 - a y^2 = b^2$ are întot-deauna un șir de soluțiuni, date de:

$$x = b u$$
$$y = b v,$$

unde u și v sunt soluțiuni ale ecuațiunei:

$$u^2 - a v^2 = 1.$$

In cazul când b este prim, va mai avea și un șir de soluțiuni prime între ele, în următoarele două cazuri.

Cazul 1. Dacă ecuația $x^2 - a y^2 = b$ are o soluție x, y, prin ridicarea la pătrat a egalității $x_1^2 - a y_1^2 = b$, găsim:

$$(x^2 - a y_1^2)^2 = (x_1^2 + a y_1^2)^2 - a (2 x_1 y_1)^2 = b^2,$$

din care rezultă că:

$$p = x_1^2 + a y_1^2$$
$$q = 2 x_1 y_1,$$

este o soluție a ecuației $x^2 - a y^2 = b^2$ și deci și:

$$p u \pm a g v$$
$$p v \pm g u$$

vor fi soluțiuni ale ecuațiunei $x^2 - a y^2 = b^2$.

Cazul 2. Dacă ecuația $m x^2 - n y^2 = b$, unde $m n = a$, are o soluție (x_1, y_1) prin ridicarea la pătrat a egalității $m x_1^2 - n y_1^2 = b$, găsim:

$$(m x_1^2 - n y_1^2)^2 = (m x_1^2 + n y_1^2)^2 - a (2 x_1 y_1)^2 = b^2.$$

Din care rezultă că:

$$p = m x_1^2 + n y_1^2, \quad \text{deci și} \quad p u \pm a g v$$
$$q = 2 x_1 y_1 \qquad\qquad p v \pm g v$$

sunt soluțiuni ale ecuației $x^2 - a y^2 = b^2$.

O altă soluție p', q', diferită de șirul de mai sus nu poate să aibă ecuația $x^2 - a y^2 = b^2$, fapt ce se dovedește exact ca la No. 7.

10. Ecuația $x^2 - a y^2 = b_1 b_2$, unde b_1 și b_2 sunt prime absolute, are două șiruri de soluțiuni în următoarele două cazuri.

Cazul 1. Dacă ecuațiile:

$$x^2 - a y^2 = b_1 \quad \text{și} \quad x^2 - a y^2 = a y^2 = b_2$$

au câte o singură soluție particulară x_1, y_1 și x_2, y_2, prin înmulțirea lor, găsim că ecuația $x^2 - a y^2 = b_1 b_2$, are ca soluțiuni pe:

$$(1) \quad p = x_1 x_2 + a y_1 y_2 \qquad (2) \quad r = x_1 x_2 - a y_1 y_2$$
$$q = x_1 y_2 + y_1 x_2 \qquad\qquad s = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

și deci și pe:

$$(1') \quad p u \pm a g v \qquad (2') \quad r u \pm a s v$$
$$p v \pm g u \qquad\qquad r v \pm s u$$

sunt soluțiuni generale ale ecuației $x^2 - a y^2 = b_1 b_2$.

Cazul 2. Dacă ecuațiile:

$$m x^2 - n y^2 = b_1$$
$$m x^2 - n y^2 = b_2$$

unde $m n = a$, au câte o soluție pe $x_1 y_1$ și $x_2 y_2$, prin înmulțirea lor găsim că ecuația $x^2 - a y^2 = b_1 b_2$, are ca soluțiuni pe:

$$(1) \quad p = m x_1 x_2 + n y_1 y_2 \qquad (2) \quad r = m x_1 x_2 - n y_1 y_2$$
$$q = x_1 y_2 + y_1 x \qquad\qquad s = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

şi deci:

$$(1') \quad \begin{matrix} pu \pm agv \\ pv \pm gu \end{matrix} \qquad (2') \quad \begin{matrix} 2u \pm asv \\ 2v \pm sa \end{matrix}$$

vor fi soluţiuni.

11. Să găsim condiţiunea necesară ca ecuaţia $x^2 - ay^2 = b_1 b_2$ să aibă două şiruri de soluţiuni:

$$\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \text{ şi } \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix},$$

fiind soluţiunile cele mai mici ale ecuaţiunei $x^2 - ay^2 = b_1 b_2$, urmează că:

$$\begin{matrix} x_1 u \pm a y_1 v \\ x_1 v \pm y_1 u \end{matrix} \text{ şi } \begin{matrix} x_2 u \pm a y_2 v \\ x_2 v \pm y_2 v \end{matrix},$$

vor fi soluţiuni ale ecuaţiunei $x^2 - ay^2 = b_1 b_2$.

Cu aceste două soluţiuni, formăm pe:

$$p = x_1 x_2 + a y_1 y_2 \qquad r = x_1 x_2 - a y_1 y_2$$
$$q = x_1 y_2 + y_1 x_2, \qquad s = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

cari sunt soluţiuni ale ecuaţiei.

$$x^2 - a y^2 = b_1^2 b_2^2.$$

Din produsul pr, deducem că el se divide cu $b_1 b_2$ şi cum nici p, nici r nu poate să se dividă cu $b_1 b_2$, caci, după 7. ar rezulta că:

$$\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix},$$

urmează că p să se împartă cu b_1 şi cu b_2 şi deci vom avea:

$$p = b_1 p_1 \qquad r = b_2 r_1$$
$$q = b_1 g_1 \qquad s = b_2 s_1.$$

Inlocuim aceste valori ale lui p, q şi r, s în ecuaţia $x^2 - ay^2 = b_1^2 b_2^2$, găsim:

$$p_1^2 - a g_1^2 = b_2^2 \quad \text{şi} \quad r_1^2 - a s_1^2 = b_1^2,$$

din care rezultă că, condiţia necesară ca ecuaţia $x^2 - ay^2 = b_1 b_2$, să aibă două şiruri de soluţiuni, este ca ecuaţiile:

$$x^2 - a y^2 = b_1^2 \quad \text{şi} \quad x^2 - a y^2 = b_2^2$$

să aibă soluţiuni prime între ele.

12. Ecuaţia $x^2 - ay^2 = b_1 b_2$, nu poate avea mai mult de două şiruri de soluţiuni, când b_1 şi b_2 sunt prime absolute.

Să presupunem că:

$$\begin{matrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{matrix} \text{ şi } \begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix},$$

cele 3 soluţiuni, care dau naştere la cele trei şiruri de soluţiuni.

Cu aceste 3 soluţiuni formăm expresiunile:

$$p = x_1 x_2 \pm a y_1 y_2 \qquad r = x_1 x_3 \pm a y_1 y_3$$
$$q = x_1 y_2 \pm y_1 x_2 \qquad s = x_1 y_3 \pm y_1 x_3$$
$$r' = x_2 x_3 \pm a y_2 y_3$$
$$s' = x_2 y_3 \pm y_2 x_3,$$

care sunt soluţiuni ale ecuaţiunei $x^2 - ay^2 = b_1^2 b_2^2$.

Din produsul pr, pr' şi rr', găsim că una din ecuaţiile:

$$x^2 - a y^2 = b_1^2 \quad \text{şi} \quad x^2 - a y^2 = b_2^2,$$

ar avea câte două şiruri de soluţiuni, ceea ce ştim că este imposibil.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

1. — *Sur les carrés symétriques de quatre chiffres.*

1. Dans le système décimal, un nombre de quatre chiffres $N = a\,b\,b\,a$, peut s'écrire:

$$1001\,a + 110\,b = 11\,(91\,a + 10\,b) = 11\,(88\,a + 11\,b + 3\,a - b).$$

Il est multiple de 11. S'il est carré parfait, il faut que le second facteur soit multiple de 11, c'est-à-dire que $3a - b$ soit nul, ou M.11. Or, $a \neq 0$, dernier chiffre d'un carré, a pour valeurs 1, 4, 5, 6, 9.

Si:

$a = 1, \quad b = 3, \quad N = 1331;$
$a = 4, \quad b = 1, \quad N = 4114;$
$a = 5, \quad b = 4, \quad N = 5445;$
$a = 6, \quad b = 7, \quad N = 6776;$
$a = 9, \quad b = 5, \quad N = 9559.$

Aucune de ces valeurs de N n'étant carré parfait, *il n'existe pas de carrés symétripues de quatre chiffres.*

2. Mais on peut rechercher d'autres systèmes de numération dans lesquels figurent des carrés symétriques de quatre chiffres.

Considérons le nombre $N = a\,b\,b\,a$ écrit dans un système de base B. On a:

$N = a\,b\,b\,a = (B+1).[aB^2 - (a-b)B + a]$,

et on observe que s'il existe un nombre entier tel que:

$$N' = aB^2 - (a-b)B + a = k^2.(B+1),$$

le nombre:

$$N = a\,b\,b\,a = [k.(B+1)]^2,$$

est un carré, ce qui fournit une solution.

En outre, si on fait $a = m^2$, $b = 3m^2$, ce qui suppose $B > 3m^2$, on a:

$N' = m^2.(B+1)^2$ et $N = (B+1).[m.(B+1)]^2$.

de sorte que si $B+1 = n^2$:

$$N = [m\,n.(B+1)]^2.$$

Donc, *il y a une infinité de systèmes de numération dans lesquels il existe des carrés symétriques* $N = a\,b\,b\,a$.

B étant plus grand que 3, ses premières valeurs sont $B = 8, 15, 24, 35, 48, \ldots, p^2 - 1$, où p est un entier quelconque.

Exemples. $B = 8$, $N = 1331 = (33)^2$

$B = 15$, $N = 1331 = (44)^2$

$N = 4\,\overline{12}\,\overline{12}\,4 = (88)^2$

$B = 24$, $N = 1331 = (55)^2$

$N = 4\,\overline{12}\,\overline{12}\,4 = (\overline{10}\,\overline{10})^2$

$B = 35$, $N = 1331 = (66)^2$

$N = 4\,\overline{12}\,\overline{12}\,4 = (\overline{12}\,\overline{12})^2$

$N = 9\,\overline{27}\,\overline{27}\,9 = (\overline{18}\,\overline{18})^2$

$B = 48$, $N = 1331 = (77)^2$

$N = 4\,\overline{12}\,\overline{12}\,4 = (\overline{14}\,\overline{14})^2$

$N = 9\,\overline{27}\,\overline{27}\,9 = (\overline{21}\,\overline{21})^2$;...

Remarques. 1°. On voit par ce qui précède que dans tout système de numération de base $B = p^2 - 1 > 3$, les nombres entiers $N = 1331$ sont des carrés parfaits. De même, dans tout système de base $B = p^2 - 1 \geq 15$, les nombres $N = 4\,\overline{12}\,\overline{12}\,4$ sont des carrés, etc.

De plus, lorsque $a = 1$:

$$N = a\,b\,b\,a = 1331 = B^3 + 3B^2 + 3B + 1 = (B+1)^3 = (n^3)^2;$$

comme le carré du nombre $\overline{n\,n}$ s'écrit:

$$(\overline{n\,n})^2 = n^2(B+1)^2 = n^6 = (n^3)^2,$$

il en résulte que les racines carrées de tous les nombres N considérés ci-dessus sont de la forme $(c\,c)$ c'est-à-dire que:

$$N = a\,b\,b\,a = (c\,c)^2.$$

2°. Un seul de ces nombre N est de la forme:

$$N = a\,b\,b\,a = (b\,b)^2,$$

lorsque $a = 1$, $b = 3$, et $B = 8$.

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta Matematică, anul XLI, No. 5, Februarie 1936 Sărbătorirea celor 40 ani ai „Gazetei Matematice". Cuvântările d-lor: Inginer *A. Ioanovici*, Rector *Vasilescu Karpen*, profesor *Gh. Țițeica*, profesor Dr. *Hurmuzescu*, profesor *P. Sergescu*, profesor *Miron Niculescu*, Rector *C. Teodorescu*, general *Dumitrescu*, Directorul școalelor militare din Ministerul Apărării Naționale. Concursul „Gazetei Matematice". Terminațiunile cuburilor perfecte și a rădăcinelor lor, de *Ioan V. Măties*.

2 *Mathematica*, vol. IX, 1935. Compte rendu du second congrès des mathématiciens roumains. (Turnu-Severin, 5–9 Mai 1932) Discours de Mrs: *G. Tzitzeica, D. Pompeiu, Ionescu Sisesti, V. Vâlcovici, A. Errera, Tchakaloff, Mandelbrojt, W. Sierpinski, F. Léja, J Karamata, G. Tzitzeica, C. Popovici, G. Bratu, S. Stoilow, V. Alaci* et *P. Sergescu*. Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions, par *Paul Montel*. Dernières recherches sur l'hypothèse du continu, par *W. Sierpinski*. Sur quelques applications de l'analyse infinitésimale à l'étude des phénomènes physiques discontinus, par *B. Hostinsky*. Sur le principe du tiers esclu, par *A. Errera*. Sur une propriété des fonctions arbitraires d'une variable réelle, par *St. Ruziewicz*. Sur le caractère de divergence des séries orthogonales par *A. Zygmund*. Une questions concernant les fondements de la théorie des déformations continues, par *W. Wilkosz*. Sur les fonctions partiellement continues, par *Stefan Kempisty*. Une propriété topologique de la surface partout localement homéomorphe au plan Euclidien, par *Stanislava Nikodyn*. Sur le principe du minimum, par *Otton Nikodym*. Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles, par *Tiberiu Popoviciu*. Représentation d'une classe de séries par un intégrale, par *Michel Petrovitch*. Sur une application des polynômes de *Legendre*, par *S. Sanielevici*. Sur les séries de *Taylor* des fonctions de deux variables réelles, par *F. Léja*. Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant, par *J Karamata*. Sur les intégrales premières de l'équation: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, par *T. Wazewski*. Sur un théorème de *M. Pompeiu*, par *Paul Montel*. Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en corrélation avec certainespropriétés des polynômes, par *Nicolas Ciorănescu* Nouvelles solutions de l'équation de *Fredholm*, dans un intervalle fermé, par *C. Popoviciu*. Extension du théorème de *Liouville* aux fonctions harmoniques d'ordre p, par *Miron Nicolesco*. Séries de puissances harmoniques dans un domaine borné, par *Miron Nicolesco*. Sur les intégrales de l'équation n métaharmonique à coéfficients imaginaires, par *M. Ghermanesco*. Sur les couples de congruences stratifiables, par familles de quadriques, par *A. Pantazi*

Sur un problème de géométrie infinitésimale, par *A. Errera.* Tétraédre bordé de prismes droits, par *V. Thébault.* Courbes sphériques, courbes *d'Enneper* et de M. *Tzitzeica*, par *Alex. Nicolesco.* Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux entre deux cylindres coaxiaux, par *Alfred Rosenblatt.* Über Anwendung einer geometrischen Darstellung auf Biometrie und Statistik, von *K. F. Vetalani* Note sur la corrélation, par *C. C. Teodoresco.* Gyromètre, par *G. Naneş.* Trois remarques sur l'histoire des mathématiques, par *Q Vetter. Diophante* et *Euclide*, par *Alexandre Birkenmayer.* Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes, d'un polynôme et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynômes, par *N. Abramesco.*

3. *Mathematica*, vol. XI, 1935 Sur le potentiel logaritmique d'une couche elliptique, par *Pierre Dive.* Sur l'extension aux espaces (V) les plus généraux des propriétés simples des expaces (V) verifiant la condition $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, par *Antoine Appert.* Sur une propriété fonctionnelle de certaines surfaces, par *G. Iuga.* Ricerche sulle cubiche gobbe in contantto tripunto o quadripunto con le asintotiche di una data superficie, *Renato Calapso.* Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites, par *Caius Iacob.* Apolare und überpolare Simplexe, von *D. Barbilian.* Sur diverses extensions de l'intégral de *Bessel*, par *Maurice Fréchet.* Quelques propriétés des équations algébriques dont les équations dérivées ont toutes leurs racines réelles, par *Tiberiu Popoviciu.* Sur une propriété des ensembles denombrables denses dans un intervalle, par *W. Sierpinski* Sur quelques notions susceptibles d'être prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits, par *Antoine Appert.* Sur une condition suffisante pour qu'un polynôme soit positif, par *Tiberiu Popoviciu* Solutions nouvelles de l'équation $\Delta_3 U = 0$, par *Pierre Humbert.* Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un, par *G. Valiron.*

4. *Boletin Matematico*, anul VIII, No. 10 Decemvrie 1935, Buenos Aires. Eliminarea folosită în progresiile aritmetice, geometrice şi în succesiuni mai generale, de *B. I. Baidaff.* Asupra unor integrale hipereliptice, complet exprimabile cu ajutorul transcendentelor elementare, de *G. G. Constantinescu.*

5. *Gazeta Matematică, supliment cu exerciţii*, Anul II, N-rile 4 şi 5. Probleme rezolvate şi propuse.

6. *Revista cercului de studii al şcoalei superioare „P. T. I."*, anul V, N-rile 1 şi 2. O aplicaţie a fracţiilor continue, de *N. Abramescu.* Pagina matematică. Diferite articole de specialitate.

7. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiintifică a liceelor militare, anul II, No. 10, Martie 1936 *Parabola*, relaţiuni metrice şi o nouă construcţie, de *Gheorghe C. Iuga.* Căldura şi temperatura, de *Nicolae R. Stănescu.* Probleme rezolvate şi propuse.

8. *Micul Matematician*, anul I, No. 1, Ianuarie 1936. Cuvânt inainte, de *Alexandru Pop. Pythagoras* părintele geometriei, de *Iordan Iosif* Din lumea numerilor mari, de *Iordan Iosif.* Piramida lui *Brahma*, de *Iordan Iosif.* Biblioteca Universală, de *Iordan Iosif.* Probleme propuse.

9. *Pl. Andronescu.* Das Problem der Dimensionen der Einheiten elektrischer und magnetischer Grössen. (Archiv für Electrotechnik, XXX. Band, 1936, I. Heft).

10. *P. Sergescu.* Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry. (Comptes-rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays Slaves, Praha 1934.)

11. *P. Sergescu.* Aperçu sur les mathématiques en Roumanie au XX-e siècle. (Comptes-rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays Slaves, Praha 1934).

12. *P. Sergescu.* Sur quelques aspects des mathématiques contemporaines. (Extrait du vol. Actes; Conférences et Communications, du III-e Congrès International d'Histoire des Sciences, tenu au Portugal en 1934).

13 *P. Sergescu.* Les mathématiques dans le journal des Savants (Osiris vol. I, 1936).

14. *M Ghermanescu.* Sur le théorème de *Picard-Borel* (Extrait des „Annales Stientifiques de l'École Normale Supérieure".)

15. *M. Ghermanescu.* Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions algébroides. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pure et appliquées, de L'École Polytechnique „Roi Carol II", V-ème année 1934—1935, fasc 16).

16. *M. Ghermanescu.* Curs de Algebră superioară pentru uzul elevilor şcoalelor technice, superioare şi militare. Este un volum de 400 pagini, care cuprinde interesante dezvoltări teoretice şi foarte multe aplicaţiuni variate, cu ingrijire alese şi foarte instructive. Cartea poate fi folosită şi de elevii secţiei stiinţifice de la licee şi o recomandăm călduros şi abonaţilor nostrii.

17. *Maior I. Linteş.* Calculul teoretic al vieţei gurllor de foc. (Extras din Revista Artileriei No. 10; 1935).

18. *Maior I. Linteş.* Practica rezolvării problemelor de Balistică Interioară.

19. *Maior I. Linteş.* Discuţiuni asupra stabilităţii unui material de artilerie. (Extras din Revista Artileriei 6—7, 1935).

20. *Maior I. Linteş.* Eforturile suportate de un avion pe timpul resursei. (Extras).

21. *Maior I. Linteş.* Problema ascultării în apararea contra aoronavelor. (Extras).

22. *Maior I. Linteş.* Apararea aerului.

PROBLEME REZOLVATE

253. — *Se dau două cercuri* O, O′ *tangente exterior într'un punct* C. *Fie* P *un punct pe tangenta comună trecând prin* C; MM′ *şi* NN′ *tangentele comune exterioare la cercurile* O, O′. *Dreptele* PM, PN *taie cercul* O *în* M_1, N_1, *iar dreptele* PM′ *şi* PN′ *taie cercul* O′ *în* M_1' *şi* N_1'. *Fie încă* S *centrul de asemănare al cercurilor* O, O′. *Să se demonstreze că cercurile* PM_1M_1', PN_1N_1', $SN'N_1$, $SM'M_1$, SMM_1, SNN_1 *sunt toate concurente într'un punct* P′, *care la rândul lui se mişcă pe un cerc fix, când* P *se mişcă pe tangenta* PC.

G-L GH. BUICLIU

Fie N_2 intersecţia cercului O′ cu N_1N_1' şi P′ proecţia lui C pe SP.

Dreapta CP fiind axa radicală a cercurilor O, O′, avem :

$$\overline{PC^2} = \overline{PN} \times \overline{PN_1} = \overline{PN'} \times \overline{PN_1'},$$

care arată că patrulaterul $NN_1N_1'N'$ este inscriptibil, deci:

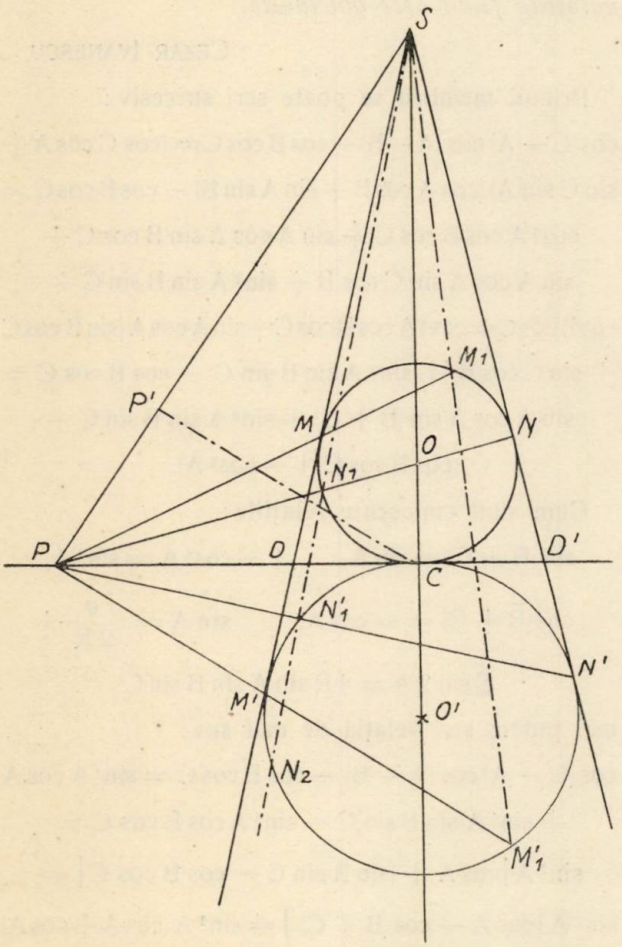
$$\sphericalangle PN_1N_2 = \sphericalangle PN'N.$$

Dar din cercul O' se vede că:

$$\sphericalangle PN'N = \sphericalangle N_1'N_2N',$$

de unde se deduce:

$$\sphericalangle PN_1N_2 = \sphericalangle N'N_2N_1,$$



ceia ce arată că NN_1, $N'N_2$ sunt paralele. Cum triunghiurile isoscele NON_1, $N'O'N_2$ au şi laturile NO, $N'O'$ paralele, sunt asemeni de unde rezultă că ON_1 şi $O'N_2$ sunt paralele. Deci dreapta $N_2N_1'N_1$ trece prin centrul de asemănare direct S al cercurilor O, O'.

La fel se arată că M_1M_1' trece prin S.

Punctul P fiind pe axul radical al cercurilor O, O' şi fiind în acelaşi timp un vârf ascuţit al triunghiului dreptunghic SCP cu înălţimea CP', vom avea:

$$(1)\quad \overline{PC^2} = \overline{PN} \times \overline{PN_1} = \overline{PN'} \times \overline{PN_1'} = \overline{PM} \times \overline{PM_1}$$
$$= \overline{PM'} \times \overline{PM_1'} = \overline{PS} \times \overline{PP'},$$

relaţiuni care arată că patrulaterele $SN'N_1P'$, $SM'M_1'P$, SM_1MP', SN_1NP' sunt inscriptibile.

Fie D, D' intersecţiile lui PC cu SMM' şi SNN'. De oare-ce:

$$DC = DM = DM'$$
$$D'C = D'N = D'N',$$

triunghiurile MCM' şi NCN', sunt dreptunghice şi cum $SC \perp PC$ rezultă:

$$\overline{SC^2} = \overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SN} \times \overline{SN'}.$$

Pe de altă parte din triunghiul SCP, dreptunghic în P, se scoate:

$$\overline{SC^2} = \overline{SP} \times \overline{SP'},$$

de unde:

$$(2)\quad \overline{SP} \times \overline{SP'} = \overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SN} \times \overline{SN'},$$

care arată că şi cercurile PMM', PNN' trec prin P'.

Din (1) se deduce că dreptele MM', M_1M_1 sunt antiparalele şi deci:

$$\overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SM_1} \times \overline{SM_1'},$$

adică cercurile PMM', PM_1M_1' trec prin P'. La fel se arată că cercurile PNN', PN_1N_1' trec prin P'.

Triunghiul SP'C fiind dreptunghic, punctul P' se mişcă pe un cerc de diametru SC.

Notă. 1°. Au rezolvat foarte bine problema pe căi analoage d nii: *Pătroianu I. M.*, *Simionescu D Gh.*, *Vasiliu C. I.* (când erau elevi la lic. militar Mânăstirea Dealului); *Răduleţ B. R.* (când era elev la Şc. Politechnică din Timişoara) şi *Tărăbuţă C. P.* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti).

2°. O dată demonstrat că S, N_1, N_1' sunt colineare, se poate face uz de teorema lui *Miquel* pentru a demonstra că cercurile PN_1N_1', PNN', SNN_1 trec prin P', etc.

3°. D-l *Tărăbuţă C. P.* a demonstrat proprietăţile şi pentru cazul cercurilor tangente exterior sau secante.

528. — *Se dau în plan două cercuri* O_1 *şi* O_2. *Un al treilea cerc* O_3 *taie pe* O_1 *în* A *şi* B, *şi pe* O_2 *în* C *şi* D. *Dreptele* AB *şi* CD *se taie în* E, *dreptele* O_1O_3 *şi* AB *în* F *şi dreptele* O_2O_3 *şi* CD *în* G.

1°. Să se arate că patrulaterul EFO_3G *e inscriptibil*

2°. *Să se găsească locul lui* E *când cercul* O_3 *variază trecând prin punctele* A *şi* C, *care rămân fixe.*

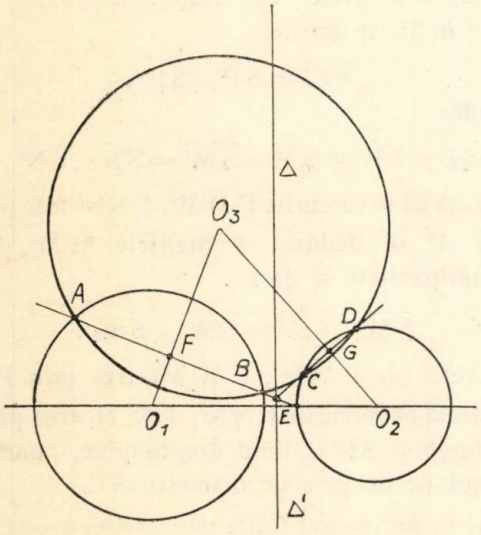
3°. *In aceleaşi condiţiuni de variaţiune a cercului* O_3, *să se găsească locul geometric al punctelor* F *şi* G.

4°. *Dreapta* AB *trece printr-un punct fix când cercul* O_3 *variază trecând prin* C *şi* D, *care rămân fixe.*

5°. *Cercul* O_3 *variind ca la* 4° *să se găsească locul geometric al lui* F.

ION PROTOPOPESCU

Soluţia 1°. $AB \perp O_1O_3$ fiind coarda comună şi linia centrelor cercurilor O_1, O_3. La fel $CD \perp O_2O_3$. Patrulaterul EFO_3G având 2 unghiuri opuse drepte este inscriptibil.



2°. Prin construcţie punctul E este centrul radical al cercurilor O_1, O_2, O_3 deci se găseşte pe axa radicală $\Delta\Delta'$ a cercurilor O_1, O_2, axă radicală care este fixă şi $\perp O_1O_2$.

Se vede că restricţia ca A şi C să fie fixe, nu prezentă nici o particularitate, $\Delta\Delta'$ fiind independentă de poziţia celor 2 puncte pe O_1 şi O_2.

3°. A şi C fiind fixe, F şi G vor descrie respectiv cercurile de diametre O_1A şi O_2C, căci unghiurile O_1FA şi O_2GC sunt drepte.

4°. Dacă C_1D sunt fixe, cum $\Delta\Delta'$ e fixă, centrul radical al cercurilor O_1, O_2, O_3 este punctul fix E, intersectia lui CD cu $\Delta\Delta'$. Coarda AB, fiind axa radicală a cercurilor O_1, O_3, trece deci prin punctul fix E.

5°. E fiind fix, F va descrie cercul de diametru O_1E.

1343. — *Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:*

$$R^2 \sum \frac{1}{a}[\cos(C-A)\cos(A-B) - \cos B \cos C] = 2\sum (p-a)\sin^2\frac{A}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

CEZAR IVANESCU

Primul membru se poate scri succesiv:

$$\cos(C-A)\cos(A-B) - \cos B\cos C = (\cos C\cos A + \sin C\sin A)(\cos A\cos B + \sin A\sin B) - \cos B\cos C =$$
$$\cos^2 A\cos B\cos C + \sin A\cos A\sin B\cos C + \sin A\cos A\sin C\cos B + \sin^2 A\sin B\sin C -$$
$$\cos B\cos C = \cos^2 A\cos B\cos C + \sin A\cos A(\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \sin^2 A\sin B\sin C - \cos B\cos C =$$
$$\sin A\cos A\sin(B+C) + \sin^2 A\sin B\sin C - \cos B\cos C(1-\cos^2 A).$$

Cum sunt cunoscute relaţiile:

$$\sin(B+C) = \sin A, \qquad 1-\cos^2 A = \sin^2 A,$$
$$\cos(B+C) = -\cos A, \qquad \sin A = \frac{a}{2R},$$
$$\sum \sin 2A = 4R\sin A\sin B\sin C$$

mai putem scri relaţia de mai sus:

$$\cos(C-A)\cos(A-B) - \cos B\cos C = \sin^2 A\cos A + \sin^2 A\sin B\sin C - \sin^2 A\cos B\cos C =$$
$$\sin^2 A[\cos A + (\sin B\sin C - \cos B\cos C)] =$$
$$\sin^2 A[\cos A - \cos(B+C)] = \sin^2 A(\cos A + \cos A)$$
$$= 2\sin^2 A\cos A = \sin A\sin 2A = \frac{a}{2R}\sin 2A.$$

Rezultă dar:

$$(1)\quad R^2\sum\frac{1}{a}[\cos(C-A)\cos(A-B) - \cos B\cos C] = R^2\sum\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2R}\sin 2A = \frac{R}{2}\sum\sin 2A$$
$$= 2R\sin A\sin B\sin C.$$

De altă parte, membrul al 2-lea al identității cerute, în virtutea relațiilor cunoscute:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c), \qquad abc=4Rs,$$

$$s=2R^2\sin A\sin B\sin C,$$

se poate scri succesiv:

$$2\sum(p-a)\sin^2\frac{A}{2}=2\sum\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$=2(p-a)(p-b)(p-c)\sum\frac{1}{bc}=$$

$$\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)(a+b+c)}{abc}=$$

$$\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{4s^2}{4Rs}=\frac{s}{R}=$$

$$2R\sin A\sin B\sin C.$$

Comparând egalitățile (1) și (2), care au ultimii membrii egali, deducem că și primii lor membrii sunt egali și avem astfel:

$$R^2\sum\frac{1}{a}[\cos(C-A)\cos(A-B)-\cos B\cos C]=$$

$$2\sum(p-a)\sin^2\frac{A}{2}.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Carol, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Of. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Mihalcea N. N* (lic. Beiuș), *Marica Pompeiu* (lic. Beius) și *Negrea A. Mircea* (Brăila).

1356. — *Să se calculeze suma:*

$$S=\sum\frac{bc+cd+db}{(a-b)(a-c)(a-d)},$$

întinsă la cantitățile a, b, c, d.

GH D. SIMIONESCU

Soluția autorului. Numitorul comun al fracțiilor din S, este:

$$N=(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d).$$

Aducând deci la același numitor fracțiile din S, găsim pentru numărător expresia:

$$M=-(bc+cd+db)(b-c)(c-d)(b-d)$$
$$-(cd+da+ac)(c-d)(d-a)(a-c)$$
$$+(da+ab+bd)(d-a)(a-b)(b-d)$$
$$+(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(a-c).$$

Dacă ordonăm această expresie în raport cu d, se vede că M este un polinom de gradul al 3-lea în d. Insă acest polinom se anulează, după cum se vede foarte ușor, pentru valorile:

$$d=a, \qquad d=b, \qquad d=c.$$

Dar acest polinom M de gradul al 3-lea în d, se mai anulează și pentru $d=0$, ceea-ce se deduce din faptul că pentru $d=0$, suma dată devine:

$$\underset{d=0}{S}=\left(\sum\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}\right)-\frac{ab+bc+ca}{abc},$$

și conform identității cunoscute („Culegere de Probleme" de d-l *A. Ioachimescu*, pag. 11), anume:

$$\sum\frac{bc}{a(a-b)(a-c)}=\frac{ab+bc+ca}{abc},$$

rezultă:

$$\underset{d=0}{S}=0.$$

Polinomul M de mai sus de gradul al 3-lea în d, se anulează în virtutea celor arătate până aci, pentru 4 valori a lui d, și conform unei teoreme cunoscute, relativ la un polinom întreg care se anulează pentru mai multe valori de cât gradul său, el este identic nul. Urmează că fracția $\frac{M}{N}$ este nulă, adică:

$$\sum\frac{bc+cd+da}{(a-b)(a-c)(a-d)}=0.$$

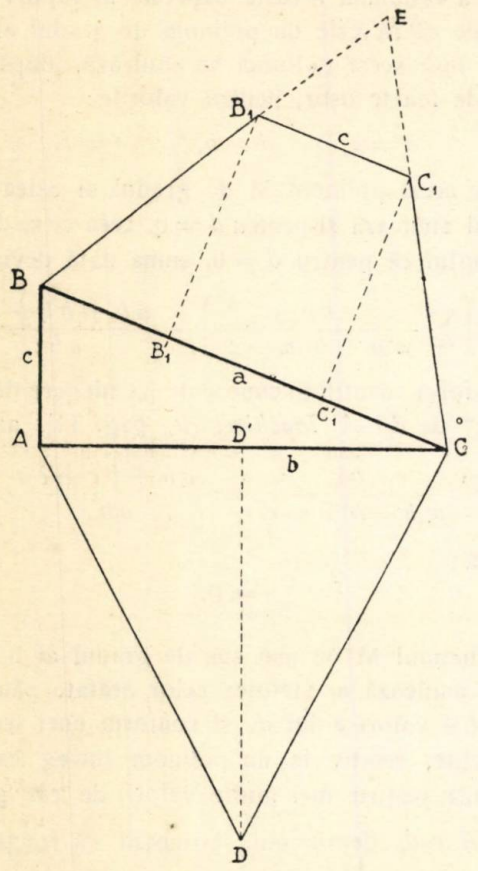
Au soluționat problema, prin calcule mai lungi, d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Millea G. E.* și *Tanasiciuc V. Claudius* (lic. Milit., Cernăuți).

1359. — *Pe ipotenuza* $BC=a$ *a unui triunghiu dreptunghic* ABC, *se construește un trapez isoscel* BB_1C_1C, *având* $BB_1=CC_1=a-c$, $(c=AB)$ *și* $\sphericalangle B_1BC=\sphericalangle C_1CB=60^0$. *Se construește apoi pe* $AC=b$ *un triunghiu echilateral* ADC. *Să se demonstreze că trapezul isoscel* BB_1C_1C, *este echivalent cu triunghiul echilateral* ADC.

V. ALACI

Construim trapezul isoscel BB_1C_1C cu unghiurile din B și C de 60^0 și triunghiul echilateral ADC.

Ducem B_1B_1', C_1C_1' perpendiculare pe BC şi DD' perpendiculară pe AC.



Din triunghiurile dreptunghice BB_1B_1' şi ADD', deducem:

$$BB_1' = BB_1 \cos 60^0 = \frac{a-c}{2},$$

$$B_1B_1' = BB_1 \sin 60^0 = \frac{(a-c)\sqrt{3}}{2},$$

$$DD' = AD \sin 60^0 = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Cum:

$$BB_1' = CC_1' = \frac{a-c}{2},$$

urmează că:

$$B_1'C_1' = BC - 2BB_1' = a - (a-c) = c,$$

deci şi:

$$B_1C_1 = c.$$

Acum avem calculate toate elementele, pentru a putea avea suprafaţa trapezului BB_1C_1C şi a triunghiului ADC.

Avem astfel:

$$(1) \quad \text{Supr.}(BB_1C_1C) = \frac{(BC+B_1C_1)\times B_1B_1'}{2} = \frac{(a+c)\frac{(a-c)\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{(a^2-c^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

fiindcă triunghiul ABC fiind dreptunghic,

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

$$(2) \quad \text{Supr.}(ADC) = \frac{AC\times DD'}{2} = \frac{b\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Privind relaţiile (1) şi (2), care au membrii al 2-lea egali, rezultă că trapezul isoscel BB_1C_1C este echivalent cu triunghiul echilateral ADC.

Soluţii date de d-rele: *Naneş Cornelia* (studentă, Bucureşti), *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Alexandrescu Paul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Amărăsteanu F. M.* (Craiova), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dumitrescu C. Paul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Enăşescu D. Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Isac C. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Lozicu Ilie* (student), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Gh. Barițiu, Cluj), *Marica P.* (lic. Beiuş), *Măgală I. Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Meta Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Millea G. E.*, *Motoc Remus* (lic. Milit., Cernăuţi), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea Mircea* (Brăila), *Pambucdjian Kricor* (lic. Constanţa), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popovici C. Alexandru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Pupăzan C-tin* (Tg-Jiu), *Rădulescu Gh. Octav* (lic. Milit., N. Filipescu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Rotta I. Stefan* (lic. Milit., Cernăuţi), *Rosenberg I.* (lic. Roman), *Runceauu N. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Serbănescu A. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stoica N. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Stoica P. Ioan* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tanasiciuc V. Claudius* (lic. Milit., Cernăuţi), *Teodorescu V. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tica P. Marin-Gal* (sudent), *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Vasilescu A. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi).

Soluţia autorului. Fie E intersecţia prelungirilor lui BB_1 şi CC_1. Triunghiul BEC_1, având unghiurile din B şi C de 60^0, este echilateral; B_1EC_1 este şi el echilateral, B_1C_1 fiind paralelă cu BC.

Având:

$$BE = BC = a, \qquad BB_1 = a - c,$$

rezultă:

$$B_1E = BE - BB_1 = a - (a - c) = c,$$

deci şi:

$$B_1C_1 = c.$$

In triunghiul dreptunghic dat ABC, putem scri:

(1) $$a^2 - c^2 = b^2.$$

Ţinând apoi seamă că suprafaţa unui triunghiu echilateral în funcţie de latura sa l, este:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

şi înmulţind relaţia (1) cu $\frac{\sqrt{3}}{4}$, obţinem:

(2) $$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ori primul membru din (2) înseamnă suprafaţa triunghiului BEC, din care se scoate suprafaţa triunghiului B_1EC_1 şi rămâne suprafaţa trapezului isoscel BB_1C_1C; membrul al 2-lea este suprafaţa triunghiului ADC.

Egalitatea (2) scrie deci, că trapezul isoscel BB_1C_1C este echivalent cu triunghiul ADC.

1375. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=49 \\ x^2y^2z^2-2(xy+yz+zx)=14 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Ecuaţia 2-a se mai poate scri:

$$(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) = 49$$

şi ţinând seamă de prima, avem:

(1) $$(xy+yz+zx)^2 - 12xyz = 49.$$

Notând:

(2) $$\begin{cases} xy+yz+zx=u \\ xyz=v, \end{cases}$$

ecuaţia 3-a a sistemului dat şi ecuaţia (1) devin:

(3) $$\begin{cases} v^2-2u=14 \\ u^2-12v=49. \end{cases}$$

Din prima ecuaţie, aflăm:

(4) $$u = \frac{v^2-14}{2},$$

care introdusă în a 2-a ecuaţie din (3), ne dă:

$$v^4 - 28v^2 + 196 - 48v = 196.$$

De aci deducem:

$$v(v^3 - 28v - 48) = 0,$$

şi observând că factorul din paranteză se anulează pentru $v=6$, -4 şi -2, avem:

$$v(v-6)(v+4)(v+2) = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt:

(5) $$v_1=6, \quad v_2=0, \quad v_3=-4, \quad v_4=-2.$$

Inlocuind aceste valori în (4), găsim respectiv:

$$u_1=11, \quad u_2=-7, \quad u_3=1, \quad u_4=-5.$$

Introducând aceste valori din (5) şi (6), care se corespund, în (2) şi adaogând şi prima relaţie a sistemului dat, găsim următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=-7 \\ xyz=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=-5 \\ xyz=-2 \end{cases}$$

Necunoscutele x, y, z din aceste sisteme, echivalente cu cel dat, sunt respectiv rădăcinele ecuaţiilor:

(7) $$t^3-6t^2+11t-6=0, \quad t^3-6t^2-7t=0,$$
$$t^3-6t^2+t+4=0, \quad t^3-6t^2-5t+2=0.$$

Prima ecuaţie din (7) se mai poate scri:

$$(t-1)(t-2)(t-3) = 0,$$

cu rădăcinele:

(8) $$t_1=1, \qquad t_2=2, \qquad t_3=3.$$

A 2-a ecuaţie din (7) se poate scri:

$$t(t+1)(t-7) = 0,$$

deci are rădăcinele:

(9) $$t_1=0, \qquad t_2=-1, \qquad t_3=7.$$

A 3-a ecuaţie din (7) se descompune astfel:

$$(t-1)(t^2-5t-4) = 0,$$

deci are rădăcinele:

(10) $$t_1=1, \quad t_2=\frac{5+\sqrt{41}}{2}, \quad t_3=\frac{5-\sqrt{41}}{2}.$$

In fine a 4-a ecuaţie din (7) se descompune astfel:

$$(t+1)(t^2-7t+2)=0,$$

şi are rădăcinele:

$$(11)\quad t_1=-1,\quad t_2=\frac{7+\sqrt{41}}{2},\quad t_3=\frac{7-\sqrt{41}}{2}.$$

Rădăcinele găsite în (8), (9), (10) şi (11) sunt într'o ordine oarecare tocmai x, y, z şi formează sistemele de soluţii a sistemului dat. Trecem aceste sisteme de soluţii în număr de 24, în următoarele tablouri:

x	1	1	2	2	3	3	0	0	−1	−1	7	7
y	2	3	1	3	1	2	−1	7	0	7	0	−1
z	3	2	3	1	2	1	7	−1	7	0	−1	0

x	1	1	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$
y	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	1	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	1	$\frac{4+\sqrt{41}}{2}$
z	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$	1	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$	1

x	−1	−1	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$
y	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$	−1	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$	−1	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$
z	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{41}}{2}$	−1	$\frac{7+\sqrt{41}}{2}$	−1

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Militt, Cernăuţi), *Berinde Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I Simion* (lic. Huşi), *Cotescu Costel* (lic. Milit., Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Millea G. E.* (Sub-Lt), *Moiscovici Ştefan* (lic Carol, Craiova), *Murgu Marţian* (lic Beiuş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ţarălungă Dimitrie* (lic. Milit., Tg-Mureş).

PROBLEME PROPUSE

1464. — In sistemul de numeraţie cu baza 4, să se găsească un patrat perfect format din patru cifre diferite.

V. THÉBAULT

1465. — Să se găsească fracţiunea ordinară care dă nastere fracţiunei periodice:

$$2,3456785678\ldots$$

M. AMARASTEANU

1466. — Se dă punctul A, fix pe cercul O şi punctul M, mobil pe diametrul perpendicular pe AO. Se cere să se determine M, aşa în cât perpendiculara în M pe AM să fie tangentă la O.

G-L GH. BUICLIU

1467. — Se dă un con drept de sticlă, gol, cu raza bazei R şi înălţimea I. Se toarnă apă printr'o deschidere, care se poate apoi închide şi se observă înălţimea la care s'a urcat apa, conul fiind asezat cu baza pe o masă orizontală.

Se întoarce apoi conul cu vârful în jos şi astfel ca baza să fie tot orizontală şi se observă că înălţimea la care s'a urcat apa este, de data aceasta dublă ca în primul caz. Să se afle volumul ocupat de apă.

V. ALACI

1468. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2(x^2+6y^2+4xy)+y^2(y^2+4xy)=16 \\ 5+4xy=0 \end{cases}$$

DUMITRU ŢARALUNGA

1469. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^{12}+y^{12}=4097 \\ x^3y^4+x^4y^3=272 \end{cases}$$

M I. PREDOESCU

1470. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se rezolve ecuaţia:

$$4spx^2-(4s^2+pabc)x+abcs=0.$$

MIHAIL M CHIRITA

1471. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}(x-30^0)+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(x+30^0)=0.$$

LT. C V. COSTACHESCU

104. **Stan A.** Locotenent de Artilerie, licenţiat matematici, Cluj.

105. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.

106. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc Polit. Timişoara.

107. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Polit. din Timişoara.

108. **Stoicescu M.** Profesor, Directorul Liceului „G. Lazăr" Bucureşti.

109. **Suhov I.** Inginer, Asistent la Şc. Polit. Timişoara.

110. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

111. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.

112. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometria Analitică dela Şc. Polit. din Timişoara.

113. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44. Bucureşti.

114. **Vasiliu Leoben Gh.** Inginer Geodet, Asistent la Şc. Polit. din Bucureşti.

115. **Viciu Aurel** Profesor la lic. Milit., Tg-Mureş.

116. **Vlad I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.

117. **Vlădescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.

118. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. Timişoara.

119. **Zaharia N. O.** Profesor-Asistent, la liceul Militar, Tg-Mureş.

120. **Zapan Gr.** Lt Comendor-Aviator, Inginer diplomat al Şcolii Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice (E. S A) din Pnris. Adjutant al A. S. R. Principelui Nicolae. Bucureşti II. Calea Griviţei 158

Incepând cu acest număr introducem rubrica manuscriselor primite de la corespondenţii nostri. până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Apostol G. N. (1149, 1451, 1453); *Cioc I. D.* (1381, 1400, 1408, 1411, 1420, 1424, 1431, 1456, 1463), *Chirvai V.* (1357, 1369, 1373), *Constantinescu C.* (1374, 1453), *Cristea G. E.* (1456), *Dulămiţă Gr. T.* (1401, 1411. 1426), *Florescu L. V.* (1274, 1422, 1455), *Lăzărescu St.* (1441), *Marica I. H.* (1315, 1356, 1357, 1368, 1387, 1388, 1417, 1431, 1441, 1444, 1449, 1451, 1452, 1453, 1462), *Marica P.* (1357, 1373, 1376, 1401, 1407, 1408, 1411, 1412, 1420, 1425, 1426), *Mocanu N. V.* (1437), *Murgu M.* (1357, 1369, 1373, 1389, 1408, 1411, 1412, 1420, 1424, 1428, 1431, 1432, 1433, 1440), *Naneş Cornelia* (1437, 1445, 1449), *Negrea A L. M.* (1280, 1417, 1418, 1426, 1444, 1445, 1446, 1449, 1451, 1452, 1453, 1455, 1456, 1462, 1463), *Negulescu St.* (1402, 1404, 1408, 1418, 1432, 1441, 1449, 1456, 1463), *Nicolaescu Ct.* (1401, 1404), *Popovici I. G.* (1373, 1374, 1375, 1381), *Roman I. N.* (1436 1456), *Rosenberg I.* (1401, 1403, 1411, 1431, 1448), *Ştefănescu C.* (1408, 1411, 1463), *Ştefănescu D. N.* (1460, 1462), *Thébault V.* (A, P), *Ţiţeica I. I.* (1188, 1195, 1219, 1274, 1291, 1432).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 APRILIE 1936 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNI INTREGI ALE ECUATIUNII $x^2 - a\,y^2 = b$.
2. NOTE MATEMATICE: 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1329, 1345, 1346, 1373, 1382.
5. PROBLEME PROPUSE: 1472–1480.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVI, care a început la 15 Martie 1936.

ANUL XVI — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

SOLUŢIUNI ÎNTREGI ALE ECUAŢIUNEI $x^2 - a y^2 = b$

DE PROF. GH. CONSTANTINESCU

(Urmare)

Din articolul precedent se deduce, că pentru a găsi toate soluţiunile întregi ale ecuaţiunei $x^2 - a y^2 = b$, unde b este prim sau un produs de două numere prime, e suficient să găsim toate soluţiile întregi ale ecuaţiunei: $u^2 - a v^2 = 1$ şi una sau două soluţiuni întregi ale ecuaţiunei $x^2 - a y^2 = b$, pe care le vom numi soluţiuni reduse.

I.

Să găsim toate soluţiunile întregi ale ecuaţiunei $u^2 - a v^2 = 1$. Această ecuaţiune are, ori care ar fi a, o soluţiune $(1, 0)$ numită soluţie banală şi pentru ai găsi toate soluţiunile acestei ecuaţiuni, vom împărţi problema în două părţi distincte.

1. Să arătăm că dacă avem o soluţie alta, afară de soluţia $(1, 0)$, putem să le găsim pe toate.

2. Cum putem găsi o soluţie a acestei ecuaţii?

a. Dacă ecuaţia $u^2 - a v^2 = 1$ are o soluţie (u_1, v_1), putem găsi a 2-a soluţie, prin ridicarea la pătrat a egalităţei, $u_1^2 - a v_1^2 = 1$.

Vom avea:

$$(u_1^2 - a v_1^2)^2 = (u_1^2 + a v_1^2)^2 - a (2 u_1 v_1)^2 = 1.$$

Din aceasta rezultă că a 2-a soluţie a ecuaţiei este:

$$u_2 = u_1^2 + a v^2$$
$$v_2 = 2 u_1 v_1.$$

Inmulţim egalităţile:

$$u_1^2 - a v_1^2 = 1 \quad \text{şi} \quad u_2^2 - a v_2^2 = 1,$$

vom găsi:

$$(u_1^2 - a v_1^2)(u_2^2 - a v_2^2) = (u_1 u_2 + a v_1 v_2)^2 - a (u_1 v_2 + u_2 v_1)^2 = 1.$$

Rezultă că a 3-a soluţie este:

$$u_3 = u_1 u_2 + a v_1 v_2$$
$$v_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2.$$

In acelaş mod procedăm şi găsim un şir de soluţiuni:

$$\begin{cases} u_1, \\ v_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = u_1^2 + a v_1^2, \\ v_2 = 2 u_1 v_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = u_1 u_2 + a v_1 v_2, \\ v_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2, \end{cases}$$

. . . . . .

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} u_{n-2} + a v_{n-1} v_{n-2} \\ v_n + u_{n-1} v_{n-2} + v_{n-1} u_{n-2}. \end{cases}$$

Se dovedeşte uşor că acest şir reprezintă toate soluţiile întregi ale ecuaţiunei $u^2 - a v^2 = 1$.

Cu condiţiunea ca prima soluţie u_1, v_1 să fie cea mai mică soluţie întreagă şi positivă, afară de soluţia banală $(1, 0)$.

Putem pune acest şir de soluţiuni sub o altă formă, care ne permite să deducem una din alta în mod uşor şi avem:

$$u_2 = u_1^2 + a v_1^2 = 2 u_1^2 - 1$$

$$u_3 = u_1 u_2 + a v_1 v_2 = u_1 u_2 + 2 a v_1^2 u_1 = u_1 u_2 + 2 u_1 (u_1^2 - 1) = 2 u_1 u_2 - u_1$$

. . . . . .

$$u_n = u_{n-1} u_{n-2} + a v_{n-1} v_{n-2} = 2 u_1 u_{n-1} - u_{n-2},$$

apoi:

$$v_2 = 2 u_1 v_1$$

$$v_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2 = u_1 v_2 + v_1 (2 u_1^2 - 1) = 2 u_1 v_2 - v_1$$

$$\vdots$$

$$v_n = u_{n-1} v_{n-2} + v_{n-1} u_{n-2} = 2 u_1 v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Din această formă a lui u_n și v_n, deducem că șirul soluțiunilor, este un șir recurent de gradul al 2-lea, care începe cu:

$$1,\ u_1$$
$$0,\ v_1$$

și ai căror termeni se formează din suma celor 2 termeni precedenți, înmulțiți respectiv cu $2u_1$ și cu (-1).

Odată pus șirul sub forma de mai sus, putem deduce imediat și formula generală a soluțiunilor acestei ecuațiuni.

In adevăr, dacă punem pe:

$$2u_1 = \alpha + \beta \qquad \text{și} \qquad 1 = \alpha\beta,$$

unde α și β sunt perfect determinați, vom avea:

$$u_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$u_2 = 2u_1^2 - 1 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$$u_3 = 2u_1u_2 - u_1 = \frac{\alpha^3+\beta^3}{2}$$

$$\vdots$$

$$u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2},$$

iar pentru v vom avea:

$$v_2 = 2u_1v_1 = (\alpha+\beta)v_1$$

$$v_3 = 2u_1v_2 - v_1 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}v_1$$

$$v_4 = 2u_1v_3 - v_2 = \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}v_1$$

$$\vdots$$

$$v_n = 2u_1v_{n-1} - v_{n-2} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_1.$$

Rezultă deci că formula generală a soluțiunilor ecuației $u^2 - av^2 = 1$, este:

$$u_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \qquad \text{și} \qquad v_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}v_1,$$

unde:

$$\alpha\beta = 1 \qquad \text{și} \qquad \alpha+\beta = 2u_1.$$

b. Să arătăm acum cum se găsește soluția întreagă cea mai mică și positivă u_1, v_1 a ecuației $u^2 - av^2 = 1$.

Din ecuația dată găsim:

$$v^2 = \frac{u^2-1}{a},$$

pentru ca u^2-1 să se împartă cu a trebue ca u să fie de forma $u = ma \pm 1$, în cazul când a este un număr prim, iar în cazul când a nu este prim și este de forma $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, trebue ca u să fie de forma:

$$u = m_1u_1 \pm 1 = m_2a \pm 1 = \cdots = m_na_n \pm 1.$$

Din rezolvarea acestor ecuațiuni nedeterminate găsim că u trebue să fie de forma:

$$u = \mathrm{M}a \pm d_1, d_2, \ldots d_k.$$

Inlocuim această valore a lui u în v^2, găsim:

$$v^2 = a\mathrm{M}^2 \pm 2d_i\mathrm{M} \pm r_i.$$

In această valoare a lui v^2, trebue să dăm lui M, diferite valori întregi până găsim pentru v^2 un pătrat perfect.

Printr'un exemplu vom arăta modul practic cum se găsește o soluție pentru v^2.

Fie ecuația:

$$u^2 - 91v^2 = 1.$$

Cum $91 = 7.13$ urmează că u va fi de forma:

$$u = 7m_1 \pm 1 = 13m_2 \pm 1.$$

Din care deducem că:

$$u = 91m \pm 1$$
$$u = 91m \pm 27.$$

Inlocuim aceste valori ale lui u în v^2 și găsim:

$$v^2 = 91m^2 \pm 2m$$
$$v^2 = 91m^2 \pm 54m + 8.$$

Un pătrat perfect față de 5 nu poate fi de cât de forma $5k$ și $5k \pm 1$ și chiar când este de forma $5k$, adică se împarte cu 5, trebue neapărat să se împartă cu 25.

Rezultă deci că:

$$v^2 = 91m^2 + 2m,$$

nu poate fi pătrat perfect de cât pentru:

$$m = 25k \qquad \text{și} \qquad m = 5k - 1, \quad -2,$$

iar:

$$v^2 = 91m^2 - 2m$$

nu poate fi pătrat perfect de cât pentru $m = 25k$ și:

$$m = 5k + 1, \quad +2.$$

In acelaş mod găsim că:

$$v^2 = 91\,m^2 + 54\,m + 8$$

nu poate fi pătrat perfect, de cât pentru:

$$m = 5\,k - 1, \quad +2, \quad -2,$$

iar:

$$v^2 = 91\,m^2 - 54\,m + 8,$$

pentru:

$$m = 5\,k + 1, \quad +2, \quad -2.$$

Facem în aceste patru forme ale lui v^2 pe $k = 0$, 1, 2, 3 şi găsim un număr de valori pentru v^2 şi trebue cercetat care din aceste valori sunt pătrate perfecte.

Eliminăm din aceste valori pe acelea ale căror ultime două cifre nu corespund unui pătrat perfect şi ne mai rămâne pentru v^2 următoarele valori:

89, 264, 825, 989, 1464, 3264, 4089, 5400,

6264, 7389, 10425, 10989, 12464, 16089, 17854,

18600, 23264, 27225, 56825, 56925, 127400,

227600, 511725, 512025.

Trebue să cercetăm acum care din aceste numere sunt pătrate perfecte.

Ştim că un pătrat perfect faţă de 7 este de forma:

$$7\,m + 0, 1, 2, 4.$$

Eliminăm din numerile de sus pe acelea care nu sunt de această formă şi din cele rămase eliminăm pe acelea care nu sunt de forma:

$$9\,m + 0, 1, 4, 7$$

şi iarăşi din cele rămase mai eliminăm pe acelea care nu sunt de forma:

$$16\,m + 0, 1, 4, 9,$$

pentru că un pătrat perfect faţă de 16, nu poate fi de cât de forma de mai sus.

Numerile 17864 şi 25389 le eliminăm cu toate că sunt de forma $7\,m$, dar nu se împart cu 49.

Singurul număr rămas după aceste eliminări este 27225, care în adevăr este pătratul perfect al lui 165.

Inlocuim această valoare a lui $v = 165$ şi găsim:

$$u = 1574.$$

Cea mai mică soluţie întreagă şi positivă a ecuaţiunii:

$$u^2 - 19\,v^2 = 1, \quad \text{este} \quad \begin{matrix} u = 1574 \\ v = 165. \end{matrix}$$

Se pot face câte-va simplificări în anumite cazuri.

1. Când a este prim de forma $4\,k + 1$, sau un produs de factori primi, toate de forma de mai sus.

Se dovedeşte uşor, că in acest caz ecuaţia:

$$u^2 - a\,v^2 = -1,$$

are soluţiuni întregi.

Dacă u_1, v_1 este o soluţe întreagă a acestei ecuaţiuni, pe care o putem găsi ca în exemplul de mai sus, vom avea:

$$u_1^2 - a\,v_1^2 = -1.$$

Ridicăm la pătrat şi vom avea:

$$(u_1^2 - a\,v_1^2)^2 = (u_1^2 + a\,v_1^2)^2 - (2\,u_1\,v_1)^2 = 1,$$

din care rezultă că:

$$u = u_1^2 + a\,v_1^2$$

$$u = 2\,u_1\,v_1$$

este o soluţie a ecuaţiei:

$$u^2 - a\,v^2 = 1.$$

Simplificarea este foarte simţitoare, căci:

$$u_1 < \sqrt{u}.$$

Un exemplu ne va lămuri de această simplificare.

Fie ecuaţia:

$$u^2 - 61\,v^2 = 1.$$

Soluţiile ecuaţiei:

$$u^2 - 61\,v^2 = -1.$$

găsite ca în exemplul de mai sus sunt:

$$u_1 = 29718$$

$$v_1 = 3805,$$

din care găsim cea mai mică soluţie pentru $u^2 - 61\,v^2 = 1$, pe:

$$u = u_1^2 + a\,v_1^2 = 1766319049$$

$$v = 2\,u_1\,v_1 = 226153980.$$

2. Când a este prim şi de forma $8\,k - 1$, sau un produs de numere prime toate de forma de mai sus.

Se dovedeşte uşor că în acest caz ecuaţia:

$$u^2 - a v^2 = 2,$$

are soluţiuni întregi.

Fie u_1, v_1 o soluţie a acestei ecuaţii pe care o găsim ca mai sus.

Ridicăm la pătrat pe $u_1^2 - a v_1^2 = 2$ şi găsim:

$$(u_1^2 - a v_1^2)^2 = (u_1^2 + a v_1^2)^2 - a (2 u_1 v_1)^2 = 4.$$

Numărul a fiind impar, urmează că u_1 şi v_1 sunt impare şi deci $u_1^2 + a v_1^2$ este par astfel că:

$$u = \frac{u_1^2 + a v_1^2}{2} \quad \text{şi} \quad v = u_1 v_1,$$

sunt soluţii ale ecuaţiei $u^2 - a v^2 = 1$.

In exemplu $u^2 - 71 v^2 = 1$, luăm ecuaţia $u^2 - 71 v^2 = 2$, care are o soluţie:

$$u_1 = 59$$
$$v_1 = 7,$$

din care rezultă că:

$$u = \frac{u_1^2 + 71 v^2}{2} = 3840$$

$v = u_1 v_1 = 413$ este o soluţie a ecuaţiunii $u^2 - 71 v^2 = 1$.

3. Când a este un număr prim de forma $8k + 3$, sau un produs de numere prime toate de această formă.

Se dovedeşte uşor că în acest caz ecuaţia $u^2 - a v^2 = -2$ are soluţiuni întregi.

Dacă u_1 şi v_1 sunt o soluţie a ecuaţiei:

$$u^2 - a v^2 = -2,$$

găsim că:

$$u = \frac{u_1^2 + a v_1^2}{2},$$

$v = u_1 v_1$, este cea mai mică soluţiune a ecuaţiei:

$$u^2 - a v^2 = 1.$$

In exemplu:

$$u^2 - 43 v^2 = 1,$$

ecuaţia:

$$u^2 - 43 v^2 = -2,$$

are o soluţie:

$$u_1 = 59$$
$$v_1 = 9,$$

din care rezultă că:

$$u = \frac{u_1^2 + 43 v}{2} = 1934$$

$v = 59.9 = 531$, este o soluţie a ecuaţiei $u^2 - 43 v^2 = 1$.

II.

Primele soluţii pe care le vom numi soluţii reduse, ale ecuaţiunei $x^2 - a y^2 = b$, unde b este un număr prim sau produsul a două numere prime, le vom găsi în modul următor:

Vom ridica la pătrat toate numerile mai mici ca $\frac{a}{2}$ şi vom reţine pe acelea ale căror resturi prin împărţirea cu a sunt aceleaşi cu restul împărţirii lui b prin a.

Fie $b_1 < \frac{a}{2}$ care se bucură de această proprietate, vom pune pe:

$$x = m a \pm b_1$$

şi vom avea pentru:

$$y^2 = a m^2 \pm 2 m b_1 + r.$$

Vom da lui m valori întregi până când găsim pentru y^2 un pătrat perfect.

Valorile lui m sunt limitate, căci după cum vom dovedi ulterior, trebue ca:

$$\sqrt{b} < x < \sqrt{\frac{b(u+1)}{2}},$$

unde u este cea mai mică soluţiune positivă a ecuaţiei $u^2 - a v^2 = 1$.

III.

In cazul general, când b este oarecare, vom trata un exemplu, până când în articolul viitor voi dovedi riguros că în modul acesta se găsesc toate soluţiile ecuaţiei $x^2 - a y^2 = b$.

Fie ecuaţia:

$$x^2 - 11 y^2 = 12950 = 25^2 . 7\,37.$$

Ecuaţiile:

$$x^2 - 11 y^2 = 2 \quad \text{şi} \quad x^2 - 11 y^2 = 7,$$

nu au soluţii întregi, pentru că atât 2 cât şi 7 nu sunt rezidii pătrate a lui 11, însă ecuaţia:

$$x^2 - 11y^2 = 2 \cdot 7,$$

are o singură soluţie redusă:

$$x_1 = 5 \; y_1 = 1.$$

Ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 5$, are ca soluţie redusă $x_1 = 4$ şi $y_1 = 1$, din care deducem că ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 25$, are două soluţii reduse, una primă între ele:

$$x_1 = 6$$
$$y_1 = 1$$

şi alta, care are divizor pe 5, pe:

$$x_2 = 50$$
$$y_2 = 15.$$

In sfârşit ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 37$, are o singură soluţie redusă:

$$x_1 = 9$$
$$y_1 = 2.$$

Cu soluţia (5, 1) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 14$ şi cu soluţia (9, 2) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 37$, găsim prin înmulţirea acestor două ecuaţii, două soluţiuni:

$$x_{1,2} = 5 \cdot 9 \pm 11 \cdot 2 = 23, 67$$
$$y_{1,2} = 10 \pm 9 = 1,19$$

pentru ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 14 \cdot 37$.

Cu prima soluţie (23, 1) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 14.37$ şi cu soluţia (6, 1) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 25$, găsim două soluţii pentru ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 14.37.25$, care sunt:

$$x_{1,2} = 6.23 \pm 11 = 127, 149$$
$$y_{1,2} = 23 \pm 6 = 17, 29.$$

Cu prima soluţie (23,1) a ecuaţiuni $x^2 - 11y^2 = 14.37$ şi cu soluţia (6,1) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 25$, găsim două soluţiuni pentru ecuaţia $x^2 - 11y^2 = 14.37.25$, cari sunt:

$$x_{1,2} = 6 \; 23 \pm 11 = 127,149$$
$$y_{1,2} = 23 \pm 6 = 17,29.$$

Cu a 2-a soluţine (67,19) a ecuaţiunii $x^2 - 11y^2 = 14.37$ şi tot cu soluţia (6, 1) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 25$, găsim alte două soluţii ale ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 14.25.37$, cari sunt:

$$x_{3,4} = 67.6 \pm 11.19 = 193,611$$
$$y_{3,4} = 114 \pm 67 = 47,181.$$

Soluţia:

$$x_4 = 611$$
$$y_4 = 181,$$

pentru că depăşeşte limitele stabilite mai sus, o vom reduce în modul următor:

Cum cea mai mică soluţie întreagă şi positivă a ecuaţiei $x^2 - 11v^2 = 1$ este (10,3), deducem că:

$$x_4 = 611.10 - 33.181 = 137$$
$$y_0 = 611.3 = 181.10 = 23$$

şi deci (137,23) este a 4-a soluţie a ecuaţiei date.

In sfârşit cu cele două soluţiuni (23,1) şi (67,19) ale ecuaţiunii $x^2 - 11y^2 = 14.37$ şi cu soluţia (50,15) a ecuaţiei $x^2 - 11y^2 = 25$, găsim ultimele două soluţiuni reduse, cari sunt:

$$x_5 = 115 \quad \text{şi} \quad x_6 = 215$$
$$y_5 = 5 \qquad\quad y = 55.$$

Cu aceste 6 soluţiuni reduse şi cu u, v soluţiunile ecuaţiuni $u^2 - 11v^2 = 1$, găsim 6 şiruri de soluţiuni ale ecuaţiunii date.

$$\begin{cases} x_1 = 115u \pm 55v \\ y_1 = 115v \pm 5u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 127u \pm 187v \\ y_2 = 127v \pm 17u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 137u \pm 253v \\ y_3 = 137v \pm 23u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 149u \pm 319v \\ y_4 = 149v \pm 29v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 193u \pm 517v \\ y_5 = 193v \pm 47u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = 215u \pm 605v \\ y_6 = 215v \pm 55u, \end{cases}$$

unde u şi v sunt soluţiunile întregi ale ecuaţiuni $u^2 - 11v^2 = 1$, date de şirul:

$$\left\{\begin{matrix}1\\0,\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}10\\3,\end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix}169\\3197,\end{matrix}\right. \quad \ldots \quad \left\{\begin{matrix} u_n = \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{2} \\ v_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{matrix}\right. \cdot 3$$

$$\alpha + \beta = 20 \quad \text{şi} \quad \alpha\beta = 1.$$

NOTE MATEMATICE

2. — *Trouver des nombres entiers* N *formés de n chiffres, dont quelques-uns des premiers chiffres peuvent, au besoin, être des zéros, de manière que le nombre :*

$$N.(10^n - 1)$$

soit un carré parfait.

Etant donné un nombre entier :

$$N = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

dont quelques-uns des n chiffres $a_1, a_2, \ldots,$ peuvent, au besoin, être des zéros, supposons que l'on ait :

$$(1) \qquad N.(10^n - 1) = \underbrace{99\ldots99}_{n} \times N =$$

$$9 \times \underbrace{11\ldots11}_{n} \times N = M^2.$$

Observons tout d'abord qu'un nombre terminé à droite par *deux* chiffres *égaux* ne peut être carré parfait que si ces deux chiffres sont 00 ou 44. Il en résulte que le nombre $m = 11\ldots11$, formé de n chiffres 1, n'est jamais carré parfait.

A. Il apparaît de suite, dans la relation (1), que pour une valeur :

$$k^2 \times 11\ldots11 = k^2 \times m,$$

de N, k étant entier, le produit :

$$N.(10^n - 1) = (3\,k\,m)^2 = M^2.$$

Comme on doit avoir :

$$(2) \qquad N \leqq 10^n - 1 = 3^2 \times m,$$

il y a déjà des solutions du problème qui correspondent à $k = 1, 2, 3$:

$$N_1 = 11\ldots11 = m \qquad M_1 = 33\ldots33 = 3\,m$$

$$M_1^2 = (3\,m)^2 = \underbrace{11\ldots11}_{n-1}\,0\,\underbrace{88\ldots889}_{n-1}$$

$$(3) \quad N_2 = 44\ldots44 = 4\,m \qquad M_2 = 66\ldots66 = 6\,m$$

$$M_2^2 = (6\,m)^2 = \underbrace{44\ldots44}_{n-1}\,3\,\underbrace{55\ldots556}_{n-1}$$

$$N_3 = 99\ldots99 = 9\,m \qquad M_3 = 99\ldots99 = 9\,m$$

$$M_3^2 = (9\,m)^2 = \underbrace{99\ldots90}_{n-1}\,8\,\underbrace{00\ldots001}_{n-1}.$$

N. B. Dans chacun de ces carrés curieux, la somme des deux nombres formés par les tranches de n chiffres consécutifs est égale à $99\ldots99 = 9\,m$.

B. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) comporte d'autres solutions est que N soit égal au produit d'un carré entier par les facteurs de $m = \frac{1}{9}(10^n - 1)$ dont les exposants sont impairs. En outre, en vertu de (2), il n'y a pas d'autres solutions autres que (3), lorsque tous les exposants des facteurs premiers de m sont égaux à l'unité.

1°. Lorsque n est *impair*, on ne peut donc retenir, de $n = 1$ á $n = 21$, que le nombre[1] :

$$m = \frac{1}{9}(10^9 - 1) = 3^2 \times 37 \times 333667,$$

pour lequel la relation (1) devient :

$$N.(10^9 - 1) = N \times 3^4 \times 12345679 = M^2,$$

et donne les solutions :

$$N = x^2 \times 123456789$$

$$M = x \times 3^2 \times 123456789 = x \times m,$$

avec, en vertu de (2) :

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Il y a donc en tout neuf solutions dans l'hypothèse envisagée :

$N_1 = 012345679$	$M_1^2 = (m)^2 = 012345678987654321$
$N_2 = 049382716$	$M_2^2 = (2\,m)^2 = 049382715950617284$
$N_3 = 111111111$	$M_3^2 = (3\,m)^2 = 111111110888888889$
$N_4 = 197530864$	$M_4^2 = (4\,m)^2 = 197530863802469136$
$N_5 = 308641975$	$M_5^2 = (5\,m)^2 = 308641974691358025$
$N_6 = 444444444$	$M_6^2 = (6\,m)^2 = 444444443555555556$
$N_7 = 604938271$	$M_7^2 = (7\,m)^2 = 604938\ 70395061729$
$N_8 = 790123456$	$M_8^2 = (8\,m)^2 = 790123455209876544$
$N_9 = 999999999$	$M_9^2 = (9\,m)^2 = 999999998000000001$

N. B. Signalons, comme curiosités de ces nombres, le carré *symètrique* de 17 chiffres :

$$M_1^2 = 12345678987654321,$$

[1] *M. Kraïtchik*, Recherches sur la théorie des Nombres, 1924—92.

puis les carrés M_3^2, M_6^2, M_9^2 qui dérivent des nombres N_3, N_6, N_9 formés de chiffres égaux, et le nombre N_8 qui est terminé à droite par sept chiffres consécutifs. Enfin la remarque déjà faite au paragraphe *A* s'applique à tous ces carrés $M_1^2, \ldots, M_9^2$.

2°. Si n est *pair*, $(n = 2p)$, on a :

$$N.(10^n - 1) = N.(10^p - 1)\ (10^p + 1) = M^2.$$

Parmi les valeurs de p, de 1 à 21, pour lesquelles la relation (1) est vérifiée, on ne peut retenir que $p = 9, 11, 21$. On a alors :

$$10^{18} - 1 = (10^9 - 1).(10^9 + 1)$$
$$10^{22} - 1 = (10^{11} - 1).(10^{11} + 1)$$
$$10^{42} - 1 = (10^{21} - 1).(10^{21} + 1), \text{ et :}$$

$$10^9 - 1 = 3^4 \times 12345679, \quad 10^{11} + 1 = 11^2 \times 826446281$$
$$10^{21} + 1 = 7^2 \times 20408163265306122449.$$

Pour chacune de ces hypothèses, on obtient successivement les solutions :

$$N = x^2 \times 12345679012345679$$
$$M = x \times 111\,111\,111\,111\,111\,111,$$

avec :

$$x = 1, 2, 3, \ldots, 9 ;$$

$$N = x^2 \times 009182736455463728191$$
$$M = x \times 303030303030303030303,$$

avec :

$$x = 1, 2, 3, 4, \ldots, 33 ;$$

$$N = x^2 \times 11111111111111111111 \times 20408163265306122449$$
$$M = x \times 33333333333333333333 \times 142857142857142857143,$$

avec :

$$x = 1, 2, 3, 4, \ldots, 21.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

3. — *Asupra descompunerei unor patrate.*

In tabloul ce urmează am format 6 şiruri de numere aşezate pe 6 linii, numărul coloanelor fiind nelimitat, deduse unele din altele în modul următor :

Linia I-a. Primele 2 numere, coloana A, sunt 1 şi 1. Fiecare coloană A, B, C, D,... cuprinde două numere : numărul din stânga al fiecărei coloane, este egal cu suma numerelor ale coloanei precedente ($12 = 5 + 7$; $5 = 2 + 3$), iar numărul din dreapta, este egal cu numărul dinaintea lui, adunat cu numărul din stânga al coloanei precedente ($17 = 12 + 5$; $7 = 2 + 5$).

Linia II-a, cuprinde numerile primei linii ridicate la patrat, în plus cele de ordin inpar, deci cele din stânga coloanelor, se multiplică prin 2 ($50 = 2 \times 5^2$; $49 = 7^2$).

Linia III-a, este formată din produsul celor două numere ale fiecărei coloane din lina I-a, multiplicate prin 2 ($70 = 2 \times 5 \times 7$).

Linia IV-a, este formată din suma celor două numere ale fiecărei coloane din linia II-a ($99 = 50 + 49$).

Linia V-a, este formată din linia II-a, adunată cu linia III-a ($120 = 50 + 70$; $119 = 49 + 70$).

Linia VI-a, este formată din linia III-a, adunată cu linia IV-a ($29 = 12 + 17$; $169 = 70 + 99$).

Relaţiile ce se pot stabili între numerile liniei II-a, III-a şi între numerele liniei V-a şi VI-a, sunt cele trecute sub tablou.

In primul caz, avem patratele perfecte, cari sunt mai mici cu unitatea, decât suma patratelor a două numere consecutive.

In al doilea caz, avem patratele perfecte, egale cu suma patratelor a două numere consecutive.

	A		B		C		D		E		F		G		H	
I.	1	1	2	3	5	7	12	17	29	41	70	99	169	239	408	577
II.	2	1	8	9	50	49	288	289	1682	1681	9800	9801	57.122	57.121	332.928	332.929
III.	2		12		70		408		2378		13.860		80.782		470.832	
IV.	3		17		99		577		3363		19.601		114.243		665 857	
V.	4	3	20	21	120	119	696	697	4060	4059	23.660	23.661	137.904	137.903	803.760	803.761
VI.	5		29		169		985		5741		33.461		195.025		1.136 689	

$$\begin{cases} 1^2+2^2=2^2+1 \\ 8^2+9^2=12^2+1 \\ 49^2+50^2=70^2+1 \\ 288^2+289^2=408^2+1 \\ 1681^2+1682^2=2378^2+1 \\ 9800^2+9801^2=13.860^2+1 \\ 57.121^2+57.122^2=80782^2+1 \\ 322.928^2+322.929^2=470.832^2+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^2+4^2=5^2 \\ 20^2+21^2=29^2 \\ 119^2+120^2=169^2 \\ 696^2+697^2=985^2 \\ 4059^2+4060^2=5741^2 \\ 23.660^2+23.661^2=33.461^2 \\ 137.903^2+137.904^2=195.025^2 \\ 803.760^2+803.761^2=1.136.689^2 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU
(Şc. Milit., de Artilerie)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 7, Martie 1936. Sărbătorirea celor 40 de ani ai „Gazetei Matematice". Cuvântările d-lor: Profesor, *Gr. G. Stratilescu*, Dr. *Săvescu*, profesor *V. Alaci*, profesor *N. Abrameseu*, prof. *Gh. Em. Filipescu*, Dr. *Gh. Th. Gheorghiu*, elev *Vintilă Grigorescu* şi profesor *A. G. Ioachimescu*. Sur une généralisation du théorème de *Droz-Farny*, par *R. Goormaghtigh*. Asupra unor configuraţii de puncte colineare, de *C. Ionescu-Bujor*. Asupra ecuaţiilor cu rădăcinele în progresie aritmetică, de Locot. C-dor *Gh. Niculescu*. Note, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gazeta Matematică, supliment cu exerciţii*, anul II, Nr. 7. Exerciţii rezolvate şi propuse.

3 *Revista cercului de studii al şcoalei superioare „P. T. T."*, anul V, Nr. 3. La sfârşit de exerciţiu bugetar, de Ing. *I. C. Schileru*. Necesitatea creerii de noui servicii în Administraţia „P. T. T.", de *Nicolau C-tin*. Calcularea greutăţii firelor, de *Popescu Longin*. Radio, de *C. Luchian*. Pagina matematică. Probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

1329. — *Intre două numere consecutive de câte două cifre se intercalează de două ori cifra zero şi se obţine un patrat perfect. Se cere să se găsească acel patrat.*

G-L GH. BUICLIU

Soluţia I. Fie $ab00cd$ patratul în care ab şi cd sunt consecutive. Considerând ultimele două cifre în care se poate termina un patrat perfect, date în *„Culegere de probleme", Aritmetica Cap. XXXIX*, rezultă că patratul cerut trebuie căutat între următoarele 40 de numere:

000001;	020001;	030004;	050004;	080009;
100009;	150016;	170016;	200021;	220021;
230024;	250024;	240025;	260025;	280029;
300029;	350036;	370036;	400041;	420041;
430044;	450044;	480049;	500049;	550056;
570056;	600061;	620061;	630064;	650064;
680069:	700069;	750076;	770076;	800081;
820081;	830084;	850084;	880089;	900089;
	950096;	970096.		

Din aceste numere, în afară de soluţia banală:

$$1^2=00.00.01$$

se găseşte prin descompunere în factori primi, prin criterii de divizibilitate sau prin extrageri de rădăcini, că singura soluţie a problemei este:

$$922^2=850084.$$

Au rezolvat problema pe această cale d-şoara *Cornelia Nanes* (studentă, Bucureşti) şi d-nii: *Amărăşteanu F. M.* (lic. Fraţii Buzeşti, Craiova), *Bucur N. N.* (lic. Militar, Iaşi), *Hompola T.* (lic. Beiuş), *Florescu Gh. H.* (Peşteana, Gorj), *Lupescu Gh.* (Şc. Pregătitoare de Ofiţeri, Bucureşti), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Millu I. N.* (lic. Milit, Chişinău), *Moisovici Ştefan* (lic. Carol, Craiova), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Pană P.* (lic. Militar, Târgovişte), *Popa N.* (lic. Beiuş), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica P. M. Gall* (student, Bucureşti) şi *Vişa E.* (Prof., Blaj).

Soluţia II. Ţinând seamă de tabloul ultimelor 4 cifre cu care se poate termina un patrat perfect (*Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pag. 134) se găseşte, ca la soluţia I, numărul 850084.

A urmat această cale d-l *Negrea A. M.* (Brăila).

Soluţia III. Ecuaţiile problemei sunt:

$$(1)\quad x^2=N00(N+1)=10001\times N+1=73\times 137\times N+1$$

$$(2)\quad y^2=(N+1)00N=10001\times(N+1)-1=73\times 137\times(N+1)-1.$$

Problema se reduce la a găsi patratele de 6 cifre de forma *mult.* 137 ± 1, între care se va găsi şi patratul cerut.

Căutăm pentru aceasta, forma numerelor x şi x^2 faţă de divizorul 137, după metoda pe care am dat-o în *Gazeta Matematică* Vol. XXXVIII, pag. 374 pentru divizorul 101.

Se găseşte că:

(3) $x^2 = 137\,m + 1$, pentru $x = 137\,m' \pm 1$

(4) $x^2 = 137\,n - 1$, „ $x = 137\,n' \pm 37$

cum x^2 e de şase cifre rezultă:

(5) $317 \leqq x \leqq 999.$

Dând lui m', n' valorile 3, 4, 5, 6, 7 se găsesc pentru x, 10 valori cuprinse în intervalul (5), dintre care numai 922^2 răspunde problemei date.

Formele (3) şi (4) ale lui x dau soluţiile generale ale ecuaţiilor (1) şi (2), ori care ar fi numărul de cifre al lui N.

1345. — *Să se găsească un patrat de şase cifre, astfel ca numărul format de cele trei cifre de la stânga, să fie media aritmetică a numărului format de cele trei cifre de la dreapta şi rădăcina a numărului cerut.*

V. THÉBAULT

Fie r rădăcina patrată, a şi b numerile de trei cifre de la stânga şi dreapta a numărului cerut N.

Conform enunţului trebuie să avem:

$$N = 10^3\,a + b = r^2, \quad 2\,a = b + r.$$

Adunând aceste relaţii, obţinem:

$$(10^3 + 2)\,a = r(r+1),$$

sau:

$$r(r+1) = 2 \times 3 \times 167 \times a,$$

relaţie care trebuie satisfăcută pentru r şi a întregi, a fiind de trei cifre. Se impunne să luăm pe r, de forma:

$$r = 167\,k, \quad \text{sau} \quad r + 1 = 167\,k,$$

ceiace ne dă în ambele cazuri:

$$167\,k(167\,k \pm 1) = 2 \times 3 \times 167 \times a,$$

sau:

(1) $$k(167\,k \pm 1) = 2 \times 3 \times a.$$

k faţă de 3 este de forma:

(2) $k = 3\,k_1$, sau (3) $k = 3\,k_1 \pm 1$.

1°. In primul caz, relaţia (1) simplificată cu 3, devine:

$$k_1(501\,k_1 \pm 1) = 2 \times a.$$

Ţinând seamă că a este de 3 cifre, nu putem lua de cât $k_1 = 1$ şi avem:

$$501 \pm 1 = 2\,a,$$

ceia ce ne dă:

$$a = 251 \quad \text{şi} \quad a = 250.$$

Dar pentru $k_1 = 1$, rezultă $k = 3$, deci:

$$r = 501 \quad \text{şi} \quad r = 500.$$

Avem astfel următoarele două soluţii:

$N = 501^2 = 251001$ şi $N = 500^2 = 250000.$

2°. Pentru cazul (3) relaţia (1) devine:

(4) $$(3\,k_1 \pm 1)(501\,k_1 \pm 167 \pm 1) = 2 \times 3 \times a.$$

Ţinând seamă că a este de 3 cifre, nu putem lua de cât:

$$k_1 = 1 \quad \text{şi} \quad k_2 = 2,$$

în care caz relaţia (4) devine respectiv:

$$(3 \pm 1)(501 \pm 167 \pm 1) = 2 \times 3 \times a$$

$$(6 \pm 1)(1002 \pm 167 \pm 1) = 2 \times 3 \times a.$$

Ţinând încă seamă că al 2-lea factor din primul membru al acestor relaţii trebuie să se dividă prin 3 şi că a este de 3 cifre, trebuie să alegem semne convenabile acolo unde avem $\pm$ şi reţinem astfel numai relaţiile:

$$4(501 + 167 + 1) = 2 \times 3 \times a$$

$$2(501 - 167 - 1) = 2 \times 3 \times a$$

$$5(1002 - 167 - 1) = 2 \times 3 \times a,$$

de unde deducem după simplicări, respectiv:

$$a = 446, \quad a = 111, \quad a = 695.$$

Dar pentru $k_1 = 1$ şi $k_1 = 2$, avem respectiv:

$$k = 4, \quad k = 2 \quad \text{şi} \quad k = 5,$$

ceia ce ne dă:

$$r = 668, \quad r = 333 \quad \text{şi} \quad r = 834.$$

Dar $r = 333$, corespunzând la $a = 111$, nu satisface condiţia $2\,a > r$, ce rezultă din $2\,a = b + r$, căci b nu poate fi negativ.

Rămâne dar numai:

$$r = 668 \quad \text{şi} \quad r = 834.$$

pentru care avem soluţiile:

$N = 668^2 = 446224$ şi $N = 834^2 = 695556$.

Numerile de şase cifre cerute sunt deci:

250000, 251001, 446224, 695556

D-ra *Savin Marica* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), a găsit numai soluţia 251001.

1346. — *Să se afle toate sistemele de numeraţie, pentru care se menţine condiţia de divizibilitate cu 3 din sistemul zecimal. Generalizare.*

EUGEN VISA

Fie x baza unuia din sistemele căutate. Un număr N scris în sistemul de numeraţie cu baza x se poate pune sub forma:

$$N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Condiţia de divizibilitate cu 3, a unui astfel de număr, este:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i \, R\left(\frac{x^i}{3}\right) = \text{mult. } 3,$$

$R\left(\frac{x^i}{3}\right)$ însemnând restul împărţirei lui x^i cu 3.

Pentru ca această condiţie (1) să se reducă la:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \text{mult. } 3,$$

care este de fapt condiţia de divizibilitate cu 3 din sistemul zecimal, trebuie ca:

$$(2) \qquad R\left(\frac{x^i}{3}\right) \equiv 1,$$

pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Cum x faţă de 3 este de forma:

$$(3) \qquad x = \text{mult. } 3 + r, \qquad (r = 0, 1, 2),$$

rezultă:

$$x^i = \text{mult. } 3 + r^i$$

şi deci:

$$R\left(\frac{x^i}{3}\right) = R\left(\frac{r^i}{3}\right).$$

Condiţia (2) se reduce la următoarea:

$$(4) \qquad R\left(\frac{r^i}{2}\right) \equiv 1, \qquad (r = 0, 1, 2).$$

Dar pentru $r = 0, 1, 2$ avem respectiv:

$R\left(\frac{0}{3}\right) = 0$; $R\left(\frac{1}{3}\right) = 1$; $R\left(\frac{2^i}{3}\right) = 1$, numai pentru i par.

Deci numai pentru $r = 1$ este satisfăcută condiţia (4) sau (2), oricare ar fi i întreg, astfel că (3) devine:

$$(5) \qquad \boxed{x = \text{mult. } 3 + 1}$$

Rezultă că numai pentru sistemele de numeraţie a căror bază este de forma (5), avem aceiaşi regulă de divizibilitate cu 3, ca acea cunoscută din sistemul zecimal.

Generalizare. Să se găsească sistemele de numeraţie, în care condiţia de divizibilitate prin k a unui număr din aceste sisteme de numeraţie, să fie următoarea: suma cifrelor să se dividă prin k.

Procedând ca în cazul de mai sus, ajungem la condiţia:

$$(6) \qquad R\left(\frac{x^i}{k}\right) \equiv 1.$$

Dar x este forma:

$$(7) \qquad x = \text{mult. } k + r, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

astfel condiţia (6) se reduce la următoarea:

$$(8) \qquad R\left(\frac{r^i}{k}\right) \equiv 1$$

condiţie care oricare ar fi i, nu-i satisfăcută de cât pentru:

$$r = 1,$$

căci chiar dacă ar exista pentru un $i = j$, un număr $r = r_1 \neq 1$ şi cuprins între 0 şi $k - 1$, astfel ca:

$$R\left(\frac{r_1^j}{k}\right) \equiv 1,$$

totuşi:

$$R\left(\frac{r_1^{j+1}}{k}\right) = R\left(\frac{r_1^j \cdot r_1}{k}\right) = R\left(\frac{r_1}{k}\right) = r_1 \neq 1,$$

deci (8) sau (6) n'ar fi satisfăcută oricare ar fi i.

Rămâne dar numai $r = 1$, în care caz din (7), rezultă:

$$\boxed{x = \text{mult. } k + 1},$$

care este condiţia cerută.

Soluții date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Damsker Dorel, Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuș) și *Țițeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

1373 — *Să se dovedească divizibilitatea prin* $(x-1)^2$, *a câtului polinomului*:

$$x^{3n+1} - x^{3n} + 1,$$

prin $x^2 + x + 1$.

V. ALACI

Notând:

$$P(x) = x^{3n+1} - x^{3n} + 1,$$

mai putem scri:

$$(1) \qquad P(x) = x^{3n+1} - x^{3n} - (x-1) + x =$$

$$x^{3n}(x-1) - (x-1) + x = (x-1)(x^{3n} - 1) + x.$$

Expresia $x^{3n} - 1$, anulânduse pentru $x^3 = 1$, se divide prin $(x^3 - 1)$ și putem scri succesiv:

$$x^{3n} - 1 = (x^3)^n - 1 = (x^3 - 1)[x^{3(n-1)} + x^{3(n-2)} + \cdots$$

$$\cdots + x^3 + 1] = (x-1)(x^2 + x + 1)[x^{3(n-1)} +$$

$$x^{3(n-2)} + \cdots + x^3 + 1].$$

Astfel (1) devine:

$$P(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1)[x^{3(n-1)} +$$

$$x^{3(n-2)} + \cdots + x^3 + 1] + x.$$

Impărțind ambii membrii prin $x^2 + x + 1$, avem:

$$\frac{P(x)}{x^2 + x + 1} = (x-1)^2[x^{3(n-1)} + x^{3(n-2)} + \cdots$$

$$\cdots + x^3 + 1] + \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

Deducem de aci câtul și restul împărțirei polinomului $P(x)$ prin $x^2 + x + 1$, anume:

$$Q(x) = (x-1)^2[x^{3(n-1)} + x^{3(n-2)} + \cdots + x^3 + 1],$$

$$R(x) = x$$

Câtul $Q(x)$ se divide deci prin $(x-1)^2$, ceeace era de dovedit.

Soluții date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă, București) și de d-nii: *Amărăștеanu F. M., Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuș), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Grabovschi F. Eugen* (Orheiu), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuș), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuș), *Popoviciu Gavril* (lic. Carei) și *Rajka Z.*

1382. — *Să se demonstreze că rădăcinele ecuației*:

$$[(2+3i)x + (3-2i)\sqrt{13 - x^2}]^{2n} - 169^n = 0,$$

(unde $i = \sqrt{-1}$),

sunt:

$$x = 2\cos\frac{k\pi}{n} + 3\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-1)$$

V. ALACI

Ecuația dată se mai poate scri:

$$\left[\frac{(2+3i)x + (3-2i)\sqrt{13 - x^2}}{13}\right]^{2n} = 1 = e^{2ik\pi},$$

de unde deducem:

$$(2+3i)x + (3-2i)\sqrt{13 - x^2} = 13\,e^{\frac{ki\pi}{n}},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

sau:

$$(3-2i)\sqrt{13 - x^2} = 13\,e^{\frac{ki\pi}{n}} - (2+3i)x.$$

Ridicând la patrat, obținem:

$$(9 - 4 - 12i)(13 - x^2) = 169\,e^{\frac{2ki\pi}{n}} +$$

$$(4 - 9 + 12i)x^2 - 26(2+3i)x\,e^{\frac{ki\pi}{n}}.$$

Simplificând termenii în x^2 și apoi împărțind cu 13 ambii membrii, găsim:

$$5 - 12i = 13\,e^{\frac{2ki\pi}{n}} - 2(2+3i)e^{\frac{ki\pi}{n}}x$$

De aci deducem:

$$x = \frac{13\,e^{\frac{2ki\pi}{n}} - (5-12i)}{2(2+3i)e^{\frac{ki\pi}{n}}} = \frac{13\,e^{\frac{ki\pi}{n}} - (5-12i)\,e^{-\frac{ki\pi}{n}}}{2(2+3i)}$$

Inmulțind cu $2 - 3i$ ambii termeni a-i fracției, care dă pe x, putem scri:

$$x = \frac{13(2-3i)e^{\frac{ki\pi}{n}} + (10 - 24i - 15i - 36)e^{\frac{ki\pi}{n}}}{26} =$$

$$\frac{26\left(e^{\frac{ki\pi}{n}} + e^{-\frac{ki\pi}{n}}\right) - 39i\left(e^{\frac{ki\pi}{n}} - e^{-\frac{ki\pi}{n}}\right)}{26},$$

sau:

$$(1) \qquad x = e^{\frac{ki\pi}{n}} + e^{-\frac{ki\pi}{n}} + 3\,\frac{e^{\frac{ki\pi}{n}} - e^{-\frac{ki\pi}{n}}}{2i}.$$

Cum sunt cunoscute formulele lui *Euler*:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},$$

ele ne dau pentru $\alpha = \frac{k\pi}{n}$:

$$e^{\frac{ki\pi}{n}} + e^{-\frac{ki\pi}{n}} = 2\cos\frac{k\pi}{n}, \quad \frac{e^{\frac{ki\pi}{n}} - e^{-\frac{ki\pi}{n}}}{2i} = \sin\frac{k\pi}{n},$$

pe care înlocuindu le în (1), obținem:

$$x = 2\cos\frac{k\pi}{n} + 3\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

Soluție dată de d-l *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila).

S'a mai primit o soluție mai puțin riguroasă de la d-l *Cazanacli V. Petre* (Chișinău).

PROBLEME PROPUSE

1472. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel că dacă se intercalează două zeruri între prima și a 2-a cifră, se obține tot un patrat perfect.

V. THÉBAULT

1473. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre de forma $abcba$ știind că rădăcina sa patrată este de forma ada și că cifrele d, b, c sunt în progresie aritmetică cu rația d.

TITUS L. BERINDE

1474. — Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Să se demonstreze că cercurile cu vârfurile în B, C și cu razele egale cu catelele triunghiului ABC, se întâlnesc în punctele P și Q de pe cercul ABC. Presupunând pe A și direcțiile catetelor fixe, se cere să se găsească locurile punctelor P și Q, în cazul când BC se deplasează paralel cu o direcție dată și în cazul când BC se rotește în jurul unui punct fix.

G-L GH. BUICLIU

1475. — Fie ABC un triunghiu, A′ mijlocul laturii BC. Cercul, trecând prin A, A′ și tangent laturii BC, taie laturile AB, AC în două puncte ale căror simetrice în raport cu mijloacele laturilor corespunzătoare, sunt B′, C′. Să se arate că există relația:

$$\left(\frac{1}{\overline{AB'}} + \frac{1}{\overline{AC'}}\right)\cdot\frac{1}{\overline{AB}+\overline{AC}} = \frac{4}{\overline{BC}^2}$$

C IONESCU-BUJOR

1476. — Dacă:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zy} = 1,$$

să se arate că avem identitatea:

$$xy + yz + zx = 1 + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

N. N. MIHAILEANU

1477. — Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ px+qy+rz=a \\ p^2x+q^2y+r^2z=a^2, \end{cases}$$

p, q, r și a fiind niște parametri variabili.

EUGEN VISA

1478. — Să se demonstreze că ecuațiile:

$$a_i x^m + b_i x^n + c_i x^p + d_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

nu pot avea o rădăcină dublă comună.

V. ALACI

1479. — Dacă, $B+C=\frac{\pi}{2}$, atunci avem identitatea:

$$\frac{(1+\sin B)(1+\sin C)}{(1+\sin B+\sin C)} = \frac{1}{2}$$

CORNELIA NANES

1480. — In orice triunghiu există relația:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A+B-2C}{3} =$$

$$\frac{2-\sin\frac{A+B-3C}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B+5C}{2}}{2+\sin\frac{A+B+5C}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B-3C}{2}}$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrunachievici Vl. (1453, 1455, 1463), *Archipescu M. C-tin* (1463), *Bărbulescu C. Tănase* (1462, 1465, 1468, 1470, 1471), *Baumgartner I. Iosif* (1374, 1376, 1463), *Berinde L. Titus* (P. 1401, 1402, 1408, 1409, 1420, 1421, 1424, 1439, 1449, 1451, 1463, 1468), *Comloşan Cornelia* (1465, 1467, 1468, 1471), *Curcă Gh. C-tin* (1415), *Dulămită I.* (1420), *Hompola I. Tiberiu* (1357, 1369, 1373), *Lamoth P.* (1446), *Lazăr T. Aurel* 1463), *Lăzărescu P. Stelian* (1272, 1376, 1400, 1405, 1408, 1416), *Korniş Ernest* (1464, 1666, 1467. 1468, 1469, 1471), *Negrea A. Mircea-Leonte* (1387, 1440, 1465, 1466, 1467, 1471) *Negulescu D. Ştefan* (1392, 1400), *Păduret A. Vasile* (1463, 1468, 1469, 1470, 1471), *Rada Dimitrie* (1467, 1468), *Rauch I. Iosif* (1404), *Rosemberg I.* (1397, 1412, 1420, 1433, 1451), *Savin C. Ioan* (N. P.) *Saviu Marioara* (1272, 1274, 1300, 1319, 1331, 1389, 1392, 1431 1441, 1449, 1451, 1453, 1455, 1456. 1463), *Smolinschi Aurel* (1462), *Stefănescu Costin* (1376, 1392, 1400, 1416, 1418, 1424, 1432), *Stoica N. D-tru* (1002, 1018, 1044, 1401, 1404, 1451), *Thébault V.* (N. P.) *Vişa Eugen* (P. 1182, 1272, 1337, 1373, 1458, 1464), *Vlad M. C. I.* (1467, 1468, 1469, 1471).

INFORMAŢIUNI

Mulţumim d-lui prof. *Gh. Constantinescu,* pentru suma de 1000 (una mie) lei, donată „R. M. T." ca taxa de membru, sumă ce ne-o va plăti anual, cum ne-a anunţat D-sa.

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care începe în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 MAI 1936 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. THÉBAULT: SUR DES PRODUITS DE NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS.
2. NOTE MATEMATICE: 4, 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 951, 1368, 1369, 1376, 1381, 1384.
5. PROBLEME PROPUSE: 1481-1488.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVI, care a început la 15 Martie 1936.

ANUL XVI — No. 3 TIMISOARA, 15 MAI 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR DES PRODUITS DE NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS

PAR V. THÉBAULT
Le Mans (France)

1. Voici d'abord quelques remarques sur la résolution en nombres entiers de l'équation :[1]

$$(1) \qquad x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)=y^m. \qquad (m>1)$$

Tout diviseur commun à deux quelconques des nombres entiers $x, x+1, x+2, \ldots x+n$, devant diviser leur différence, est nécessairement l'un des nombres 1, 2, 3, 4, ..., n. Dès lors, tout diviseur premier commun à deux quelconques des nombres $x, x+1, x+2 \ldots, x+n$, est nécessairement l'un des nombres premiers 2, 3, 5, ..., p, en désignant par p le plus grand des nombres premiers compris dans la suite 1, 2, 3, ..., n.

Si le produit :

$$P = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$$

est la puissance $m^{ième}$ exacte d'un entier y, comme le suppose l'équation donnée, et qu'en outre l'exposant de la plus haute puissance d'un nombre premier, divisant l'un des facteurs du premier membre de cette équation, ne soit pas un multiple de m, ce nombre premier appartiendra à la suite 2, 3, 5, ..., p, car il devra diviser au moins *deux* facteurs du produit.

Lemme I. Si un facteur du produit P *n'est divisible par aucun des nombres* 2, 3, 5, ..., p, *il sera, par cela même, une puissance* $m^{ième}$ *exacte.*

Lemme II. Si un facteur du produit P *n'admet comme diviseur qu'un seul des nombres premiers* 2, 3, 5, ..., p, *il sera une puissance* $m^{ième}$ *ou le produit d'une puissance* $m^{ième}$ *exacte par ce nombre premier.*

Ces deux propositions découlent immédiatement des remarques précédentes.

Lemme III. Aucun des facteurs $x, x+1, x+2, \ldots, x+n$, *ne peut admettre comme diviseurs tous les nombres premiers* 2, 3, 5, ..., p.

En effet, supposons, en premier lieu, que l'un des facteurs extrêmes x, par exemple, soit divisible séparément par 2, 3, 5, ..., p. Alors $x+1$, qui est premier avec x, n'admettant aucun de ces diviseurs, sera une puissance $m^{ième}$ exacte, (*Lemme I*). Et comme x est, par hypothèse, multiple du produit $(2.3.5\ldots.p)$, les facteurs $x+2$, $x+4$ seront divisibles par 2 et n'auront par d'autres diviseurs compris dans la suite 2, 3, 5, ..., p. En outre, aucun des facteurs $x+2$, $x+4$ n'est une puissance $m^{ième}$ exacte, car $x+1$ étant la $m^{ième}$ puissance d'un nombre entier plus grand que l'unité, tout autre nombre plus grand que $x+1$ ne peut être la $m^{ième}$ puissance d'un nombre entier que s'il surpasse $x+1$ d'au moins 5 unités, (pour $m=2$ et à *fortiori* pour $m>2$). Il faut donc, (*Lemme II*), que $x+2$ et $x+4$ soient des entiers de la forme $2a^m$ et $2b^m$, ce qui exige $b^m - a^m = 1$. On est donc conduit à cette conclusion que si x était multiple du produit $(2.3.5\ldots p)$, la différence des m^{imes} puissances entières, $(m>1)$, de deux nombres entiers b et a serait égale à l'unité, ce qui est absurde. La même démonstration convient à l'autre facteur extrême $x+n$.

Quant aux facteurs intermédiaires $x+1$, $x+2, \ldots, (x+n-1)$, si l'un d'eux $x+1$, par exemple, était multiple de $(2.3.5\ldots.p)$, les facteurs x, $x+2$, qui le comprennent, seraient des puissances $m^{ièmes}$ exactes, (*Lemme I*), ce qui est évidemment impossible, puisqu'ils ne diffèrent que de *deux* unités.

[1]) Nos développements généralisent des résultats obtenus, par un procédé analogue, lorsque $m=2$. (*Gerono, Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860 – 38.

2. Comme applications de ces remarques, nous allons démontrer les théorèmes suivants :[1]

Les produits de trois, *de* quatre, *de* cinq, *de* six, *de* sept *nombres eintiers consécutifs ne sont jamais des puissances* $m^{ièmes}$ *exactes*, $(m > 1)$,

En d'autres termes, nous allons prouver que les cinq équations :

(A) $$x(x+1)(x+2) = y^m$$

(B) $$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^m$$

(C) $$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = y^m$$

(D) $$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = y^m$$

(E) $$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)\ x+6) = y^m,$$

n'ont aucune solution entière.

(A). Dans ce cas, où $n = 2$, $p = 2$, si les nombres x, $x+1$, $x+2$ vérifiaient l'équation donnée, aucun d'eux ne pourrait être multiple de 2, (*Lemme III*), ce qui est absurde.

(B). $n = 3$, $p = 3$, $(2 \ldots . p) = 6$. Donc, si les nombres x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ vérifiaient l'équation, aucun d'entre eux ne pourrait être multiple de 6, (*Lemme III*). Il en résulterait que le plus petit d'entre eux serait de l'une des formes :

$$x = 6a+1 \qquad \text{ou} \qquad 6a+2.$$

1°. Si $x = 6a+1$, x n'admettant aucun des diviseurs 2 et 3 est une puissance $m^{ième}$ exacte, (*Lemme III*). Dès lors, le produit $(x+1)(x+2)(x+3)$ devrait aussi être une $m^{ième}$ puissance, ce qui est impossible, (A).

2°. Si $x = 6a+2 = 2(3a+1)$, $3a+1$ étant premier avec 2, (*Lemme III*), x n'a par d'autre diviseur premier que 2, dans la suite 2, 3. On a donc, (*Lemme II*), $x = b^m$, et, en vertu de ce qui précède, l'équation (B) est impossible, ou bien $x = 2b^m$, ce qui donne successivement, (*Lemme II*) :

$$x+1 = 6a+3 = 3(2a+1) = 3c^m$$

$$x+2 = 6a+4 = 2(3a+2) = 2d^m$$

$$x+3 = 6a+5 = e^m,$$

a, b, c, d, e étant des nombres entiers. En effet, puisque $x = 6a+2$, les entiers $x+2 = 6a+4 = 6a+3+1 = 3(2a+1)+1$ et $x+3 = 6a+5$, sont premiers avec 3.

En definitive, on devrait avoir :

$$y^m = x(x+1)(x+2)(x+3) =$$

$$2b^m \cdot 3c^m \cdot 2d^m \cdot e^m = 12(b \cdot c \cdot d \cdot e)^m,$$

ce qui est impossible.

(C). $n = 4$, $p = 3$, $(2 \ldots . p) = 6$. Si l'équation donnée était vérifiée, aucun des nombres x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ ne serait divisible par 6, (*Lemme III*). Donc, le plus petit d'entre eux $x = 6a+1$; d'où il résulterait que x, premier avec 2 et 3, serait une puissance $m^{ième}$, (*Lemme I*), et le produit $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ devrait aussi être une puissance $m^{ième}$ exacte, ce qui est impossible, (B).

(D). $n = 5$, $p = 5$, $(2 \cdot 3 \ \ldots . p) = 30$. Nous allons faire voir que si l'équation admettait une sclution entière, il en résulterait cette absurdité que parmi six nombres entiers consécutifs x, $x+1, \ldots, x+5$, il n'y aurait pas un seul multiple de 6.

Démontrons d'abord qu'aucun des facteurs extrêmes x, $x+5$ ne peut être multiple de 6.

Si $x = 6a$, le nombre entier a est premier avec 5, (*Lemme III*). Or, $x+5 = 6a+5$; donc $x+5$, qui est premier avec 2, 3, 5, est une puissance $m^{ième}$ exacte. Dès lors, le produit $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ devrait être une puissance $m^{ième}$, ce qui est impossible, (C).

La même démonstration convient à l'autre facteur $x+5$. Il reste à considérer les facteurs intermédiaires $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. Si l'un d'eux, $x+2$, par exemple, est multiple de 6, il est évident que les facteurs $x+1$, $x+3$ qui comprennent $x+2$, seront premiers avec 6, et, comme ils ne peuvent être, tous deux, multiples de 5, l'un d'eux n'admettra aucun des diviseurs 2, 3, 5 et sera par conséquent la $m^{ième}$ puissance a^m d'un nombre entier, (*Lemme I*). L'autre facteur $a^m \pm 2$, premier avec 6, n'étant pas une $m^{ième}$ puissance exacte, devra être divisible par 5. On aurait donc, (*Lemme II*) :

$$a^m \pm 2 = 5b^m.$$

Seul, l'un des facteurs $x+1$ ou $x+3$ du produit $x(x+1)\ldots(x+5)$ serait donc multiple de 5. Ce nombre premier 5 est à la première puissance

[1]) Des démonstrations directes de ces théorèmes ont éte données. Cfr., par exemple, *A. Guibert*, *Nouvelles Annales*, 1860—213, *V. Thébault*, *Mathesis*, 1932—420.

si b est premier avec 5 et à la puissance $m+1$ si b est multiple de 5. Le produit $x(x+1)\ldots(x+5)$ ne contenant le nombre premier 5 qu'à la première puissance ou à la puissance $m+1$ ne saurait donc être une puissance $m^{ième}$ parfaite.

(E). $n=6$, $p=5$, $(2.3.\ldots.p)=30$. Comme pour l'équatioon (D), si l'équation envisagée ici admettait une solution entière, aucun des sept nombres x, $x+1,\ldots,x+5$, $x+6$, ne serait divisible par 6.

En effet, on démontre comme dans le cas précédent, qu'il est impossible que l'un des facteurs intermédiaires $x+1$, $x+2,\ldots,x+5$ soit multiple de 6.

Supposons que $x=6a$; on a $x+6=6(a+1)$, et les nombres entiers a, $a+1$ sont premiers avec 5, (*Lemne III*). Or, les égalités $x=6a$, $x+6=6(a+1)$ donnent:

$$x+1=6(a+1)-5 \quad \text{et} \quad x+5=6a+5.$$

Ces dernières montrent que les facteurs $x+1$, $x+5$ ne sont divisibles par aucun des nombres 2, 3, 5.

Donc, on a:

$$x+1=b^m,\ x+5=c^m;\ \text{d'où}\ c^m-b^m=4,$$

ce qui est impossible puisque la différence des $m^{ième}$ puissances de deux nombres entiers c et b, plus grands que l'unité, est au moins égale à 5, (pour $m=2$, et à *fortiori* pour $m>2$) Il est donc démontré que l'équation (E) n'admet pas de solution entière.

Nota Redacției. La 15 Aprilie 1936, am primit de la d-l *V. Thébault* înștiințarea, să suprim nota D-sale matematică din numărul trecut al revistei, deoarce a apărut și în „Mathesis, 1936 (supplément), unde o trimitese cu 2 ani în urmă. Cum, revista apăruse la 15 Aprilie, n'am putut satisface cererea d-sale și țin să menționez aci acest lucru.

NOTE MATEMATICE

4. — *Relații de trigonometrie*[1]

1. Fie 3 vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ dirijați după laturile triunghiului ABC. Din chiar faptul că conturul ABC este închis, rezultă că vectorii își fac echilibrul:

$$(1) \qquad \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0.$$

Interpretând relația în planul complex în care direcția reală o dă o dreaptă (Δ) ce taie laturile triunghiului sub unghiurile α, β, γ — deci $\bar{a}=a\,e^{i\alpha}$ (a modulul și α argumentul vectoru'ui a), (1) divine:

$$(2) \qquad a\,e^{i\alpha}+b\,e^{i\beta}+c\,e^{i\gamma}=0,$$

unde separând părțile reale și imaginare:

$$(3) \qquad \begin{aligned} a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma&=0\\ a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma&=0. \end{aligned}$$

Schimbând sensul unității imaginare — ceeace revine a înmulți a doua relație din (3) cu i și a scădea din prima, se obține:

$$(2') \qquad a\,e^{-i\alpha}+b\,e^{-i\beta}+c\,e^{-i\gamma}=0$$

și făcând produsul (2) cu (2'):

$$a^2+b^2+c^2+2\sum a\,b\,[e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}]=0$$

și înlocuind parantezele în baza formulei *Euler*:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

se poate încă scrie că o dreaptă Δ, taie laturele a, b, c ale unui triunghiu, sub unghiurile α, β, γ ce verifică relația:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+2\,b\,c\cos(\beta-\gamma)+\\ &2\,c\,a\cos(\gamma-\alpha)+2\,a\,b\cos(\alpha-\beta)=0. \end{aligned}$$

2. Particularizând: $\alpha=\pi$, $\beta=C$, $\gamma=-B$, ceeace conduce a considera dreapta (Δ) în poziția BC, se obține relațiile fundamentale ale trigonometriei rectilinii; astfel relația (2) devine:

$$(II) \qquad a=b\,e^{iC}+c\,e^{-iB}$$

relația cea mai simplă și generală între laturile și unghiurile unui triunghiu. Se mai poate obține din (2), înmulțind cu $e^{-i\alpha}$ și ținând seamă că $\alpha-\gamma=B$, $\beta-\alpha=C$, sau direct din (1): $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$.

Desfăcând relația (II), se obține:

$$(III) \qquad a=b\cos C+c\cos B, \quad 0=b\sin C-c\sin B.$$

Înmulțind (II) cu (II'): $a=b\,e^{-iC}+c\,e^{iB}$ sau particularizând (4) și ținând seamă și de prima din (III): $a+b\cos(\alpha-\beta)+c\cos(\gamma-\alpha)=0$, se găsește:

$$(IV) \qquad a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos A.$$

In felul acesta, trigonometria triunghiului apare

[1]) Comunicare ținută la societatea de matematică, în ședințele cu caracter elementar.

ca o particularizare a relaţiilor simetrice (2), (3) şi (4).

3. Efectuând asupra formulelor de bază, anumite transformări elementare, se va obţine relaţii trigonometrice corespunzătoare.

Astfel, înmulţind (2) cu $e^{i\varphi}$, ceeace revine la considera o dreaptă făcând cu Δ, un unghiu φ, ca axă reală, se obţine:

$$(2'') \qquad a\,e^{i(\alpha+\varphi)} + \ldots = 0$$

şi separând:

$$(5)\quad \begin{cases} a\cos(\alpha+\varphi) + b\cos(\beta+\varphi) + c\cos(\gamma+\varphi) = 0 \\ a\sin(\alpha+\varphi) + b\sin(\beta+\varphi) + c\sin(\gamma+\varphi) = 0, \end{cases}$$

cum se observă, relaţiile (5) şi implicit (3), nu sunt distincte, căci se obţine una din alta, schimbând φ în $\frac{\pi}{2}+\varphi$, sau prin derivare în raport cu φ.

Ridicând (2) şi (2″) la patrat şi separând:

$$(6)\qquad a^2\cos 2\alpha + b^2\cos 2\beta + c^2\cos 2\gamma + 2ab\cos(\alpha+\beta) + 2bc\cos(\beta+\gamma) + 2ca\cos(\gamma+\alpha) = 0$$

. . . . . .

$$(7)\quad a^2\cos 2(\alpha+\varphi) + b^2\cos 2(\beta+\varphi) + c^2\cos 2(\gamma+\varphi) + 2ab\cos(\alpha+\beta+2\varphi) + 2bc\cos(\beta+\gamma+2\varphi) + 2ca\cos(\gamma+\alpha+2\varphi) = 0$$

. . . . . .

(o relaţie analoagă în sinus).

Pentru $\varphi = 0$, se obţine (6) din (7) şi (2) din (2″).

Luând $\varphi = -(\alpha+\beta+\gamma)$, (5) devine:

$$(8)\quad \begin{cases} a\cos(\beta+\gamma) + b\cos(\gamma+\alpha) + c\cos(\alpha+\beta) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sau:

$$(9)\quad \begin{aligned} &a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\gamma\cos\alpha + c\cos\alpha\cos\beta \\ &a\sin\beta\sin\gamma + b\sin\gamma\sin\alpha + c\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Pentru triunghiul ABC, rezultă încă în urma particularizării:

$$(V)\quad \begin{cases} a\cos\varphi = b\cos(C-\varphi) + c\cos(B+\varphi) \\ a\sin\varphi = -b\sin(C-\varphi) + c\sin(B+\varphi) \end{cases}$$

$$(VI)\quad \begin{cases} a^2 = b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B-C) \\ 0 = -b^2\sin 2C + c^2\sin 2B + 2bc\sin(B-C) \end{cases}$$

şi în particular într'un triunghiu dreptunghiu:

$$(VI')\quad \begin{cases} a^2 = (c^2-b^2)\cos 2B + 2bc\sin 2B \\ 0 = (c^2-b^2)\sin 2B - 2bc\cos 2B. \end{cases}$$

Apoi:

$$(VII)\quad \begin{cases} a^2\cos 2\varphi = b^2\cos 2(C-\varphi) + c^2\cos 2(B+\varphi) + 2bc\cos(B-C+2\varphi) \\ a^2\sin 2\varphi = -b^2\sin 2(C-\varphi) + c^2\sin 2(B+\varphi) + 2bc\sin(B-C+2\varphi) \end{cases}$$

şi în fine:

$$(VIII)\quad \begin{cases} a\cos(B-C) = b\cos B + c\cos C \\ a\sin(B-C) = b\sin B - c\sin C, \end{cases}$$

care se poate obţine şi din (V) cu $\varphi = C$, sau din (3) când (Δ) este direcţia antiparalelă laturei BC: $\alpha = \pi + B - C$, $\beta = B$, $\gamma = -C$.

5. O interpretare diferită a relaţiei (3), este următoarea: P şi Q fiind două puncte în planul triunghiului, de proiecţii P_a, P_b, P_c şi Q_a, Q_b, Q_c pe laturi, avem $\cos\alpha = \frac{P_aQ_a}{PQ}, \ldots$ deci considerând dreapta (Δ) determinată de P şi Q:

$$(10)\qquad a\cdot P_aQ_a + b\cdot P_bQ_b + c\cdot P_cQ_c = 0.$$

Ca aplicaţie, A′, B′, C′ fiind picioarele înălţimilor şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor, avem:

$$a\cdot A'A_1 + b\cdot B'B_1 + c\cdot C'C_1 = 0.$$

Analog, D, E, F fiind contactele cercului înscris:

$$a\cdot A_1D + b\cdot B_1E + c\cdot C_1F = 0.$$

Dar:

$$A'A_1 = R\sin(B-C),$$

$$A_1D = 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

deci relaţiile precedente devin:

$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$$

$$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

etc.

Fie încă 3 puncte α, β, γ pe laturile triunghiului; dacă A_1, B_1, C_1 sunt proiecţiile pe aceleaşi laturi, ale unui aceluiaş punct din plan, relaţia:

$$a\cdot A_1\alpha + b\cdot B_1\beta + c\cdot C_1\gamma = 0,$$

exprimă condiţia ca α, β, γ să fie proiecţiile unui punct, sau ca perpendicularele în aceste puncte pe laturi, să fie concurente.

Se regăseşte, în modul acesta, rezultate cunoscute.

N. N. MIHAILEANU

5. — *Stabilirea ecuației probabilității erorilor.*

Fie $x_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ valorile obținute prin măsurătoarea de i-ori a unei cantități (mărimi) a cărei adevărată valoare fie notată cu X și să punem:

$$X - x_i = \pm \varepsilon_i$$

Adică, am notat cu $\pm \varepsilon$ diferențele adevăratei valori a necunoscutei X, față de valorile obținute prin măsurătoare și deci inevitabil afectate cu erori.

Consider că fiecare din erorile reale $\pm \varepsilon_i$ este provenită din suma algebrică a unui foarte mare număr de *erori elementare* w, cari prin faptul că sunt atât de mici, pot fi luate ca egale între ele în valoare absolută și cari se mai bucură de propietatea că cele pozitive sunt tot atâta de probabile ca și cele negative.

Acest număr destul de mare de erori elementare w se combină în diferite feluri, anulându-se atunci când un acelaș număr de erori elementare pozitive se suprapun cu un exact acelaș număr de erori negative, dând astfel o eroare $\varepsilon = 0$, sau dacă numărul erorilor elementare pozitive este mai mare decât cel al erorilor elementare negative combinația dă o eroare $\varepsilon > 0$, etc.

Să vedem care sunt posibilitățile de combinare când se suprapune:

$$+ w - w \quad \text{cu} \quad + w - w,$$

iar combinația rezultată s'o suprapunem iarăși cu o combinație simplă $+ w - w$.

Când eroarea elementară $+ w$ se suprapune cu combinația de erori $+ w - w$ rezultă:

$$\begin{array}{l} +(+2w)+(0) \qquad \text{și} \\ \underline{\qquad +(0)+(-2w) \qquad \text{când combinația se face cu } -w,} \\ +1(+2w)+2(0)+1(-2w) \end{array}$$

care combinată cu $+ w - w$:

$$\begin{array}{l} \text{dă cu } +w: \; +1(+3w)+2(+w)+1(-w) \qquad \text{și} \\ \text{cu } -w: \; \underline{\qquad +1(+w)+2(-w)+1(-3w)} \\ \qquad +1(+3w)+3(+w)+3(-w)+1(-3w) \end{array}$$

care combinată mai departe cu $+ w - w$, dă

$$\begin{array}{l} \text{cu } +w: \; +1(+4w)+3(+2w)+3(0)+1(-2w) \qquad \text{și} \\ \text{cu } +w: \; \underline{\qquad +1(+2w)+3(0)+3(-2w)+1(-4w)} \\ \qquad +1(+4w)+4(+2w)+6(0)+4(-2w)+1(-4w) \end{array}$$

și așa mai departe. Șirurile următoare se pot ușor scrie:

$$+1(+5w)+5(+3w)+10(+w)+10(-w)+5(-3w)+1(-5w)$$

etc.

Din seriile de erori obținute mai sus, deducem că toți coeficienții sunt binomiali și că șirurile de ordin superior celor scrise de noi trebue să aibe tot coeficienți binomiali. Mai putem spune că fiecare șir de erori începe cu o eroare și că fiecare termen mai departe se obține din precedentul mai puțin $(2w)$.

Deci termenul de gradul m al seriei de ordinul $2n$ este:

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n+2-m)}{(m-1)!}[(2n+2-2m)w],$$

iar termenul de gradul $(n+1)$:

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}[0].$$

Infine punând:

$$k = n + 1 - m$$

putem scrie că frecvența eroarei $2kw$, este:

$$F_{2kw} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+k+1)}{(n-k)!}$$

și că ea se raportă către frecvența eroarei 0, dupe cum:

$$F_{2kw} : F_0 = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+k+1)}{(n-k)!} : \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}$$

de unde:

$$F_{2kw} = \frac{(n+1-k)(n+2-k)\ldots n}{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)} F_0.$$

Observ însă că:

$$F_0 = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = 2^{2n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$$

și ținând seama de valoarea lui π dată prin expresia *Wallis*, am că:

$$F_0 = \sqrt{\frac{2^{2n}}{\frac{2.2.4.4\ldots 2n.2n}{1.1.3.3\ldots(2n-1).(2n-1)}}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}}$$

si deci:

$$F_{2kw} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}} \cdot \frac{(n+1-k)(n+2-k)\dots n}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)},$$

expresie care prin împărţirea numitorului şi numărătorului cu n^k şi apoi prin logaritmarea ei ne dă:

$$F_{2kw} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}} \cdot \frac{1\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\overset{*}{L}\overset{*}{F}_{2kw} = L\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}}\right) + L\left(1-\frac{1}{n}\right) - L\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + L\left(1-\frac{k-1}{n}\right) - 1\left(1+\frac{k-1}{n}\right) - L\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Infine dezvoltând în serie:

$$\begin{aligned} L\,F_{2kw} = L\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi.n}}\right) &- \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}\cdots \\ &- \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4}\cdots \\ &- \frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} - \frac{8}{3n^3} - \frac{16}{4n^4}\cdots \\ &- \frac{2}{n} + \frac{4}{2n^2} - \frac{8}{3n^3} + \frac{16}{4n^4}\cdots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &- \frac{k-1}{n} - \frac{(k-1)^2}{2n^2} - \frac{(k-1)^3}{3n^3} - \frac{(k-1)^4}{4n^4}\cdots \\ &- \frac{k-1}{n} + \frac{(k-1)^2}{2n^2} - \frac{(k-1)^3}{3n^3} + \frac{(k-1)^4}{4n^4}\cdots \\ &- \frac{k}{n} + \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k^3}{3n^3} + \frac{k^4}{4n^4}\cdots \end{aligned}$$

Adunând pe coloane:

$$L\,F_{2kw} = L\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi.n}}\right) - \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{k}(i-1)\frac{k}{n} +$$

$$\frac{k^2}{2n^2} - \frac{2}{3n^3}\sum_{i=2}^{k}(i-1)^3 - \frac{k^3}{3n^3} + \frac{k^4}{4n^4}\cdots$$

şi ţinând seama că:

$$-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{k}(i-1) - \frac{k}{n} = -\frac{k^2}{n};$$

$$-\frac{2}{3n^3}\sum_{i=2}^{k}(i-1)^3 - \frac{k^3}{3n^3} = -\frac{k^2(n+1)}{2.3.n^3} \text{ etc.},$$

pot scrie mai departe că:

$$L\,F_{2kw} = L\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi.n}}\right) - \frac{k^2}{n} + \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k^2(n+1)}{2.3n^3} + \frac{k^4}{4n^4} + \cdots$$

$$\overset{*}{*}\quad F_{2kw} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}}\, e^{-\frac{k^2}{n} + \frac{k^2}{2n^2} - \frac{k^2(n+1)}{2.3.n^3} + \frac{k^4}{4n^4}\cdots}$$

Cum însă, n este un număr la voia noastră de mare, putem neglija din şirul dela exponent termenii începând cu cel de al doilea şi ne rămâne:

$$F_{2kw} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n.\pi}}\, e^{-\frac{k^2}{n}}$$

expresie care ne dă frecvenţa eroarei respective $2kw$.

Infine probabilitatea eroarei $2kw$ este dată de câtul dintre frecvenţa eroarei şi numărul tuturor cazurilor posibile:

$$P_{2kw} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}\sqrt{n.\pi}}\, e^{-\frac{k^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n.\pi}}\, e^{-\frac{k^2}{n}}$$

şi în general probabilitatea unei erori oarecare ε_i, este:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n.\pi}}\, e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon_i}{w}\right)^2}$$

sau:

$$P_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\left(\frac{\varepsilon}{w}\right)^2}.$$

Metoda, destul de elementară, pe care am întrebuinţat-o pentru stabilirea ecuaţiei probabilităţilor, mai are avantajul că ne conduce la interesanta legătură, care există între h, parametrul de preciziune, şi n numărul observaţiunilor efectuate:

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

dându-ne ocazia să tragem interesante concluzii pe baza analogiei ce h, o prezintă faţă de eroarea mediei aritmetice M, despre care am vorbit în „R. M. T.“, vol. XIII, pag. 50, exprimată în funcţie de eroarea mijlocie a unei singure măsurători:

$$M = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot m.$$

Dar asupra acestei chestiuni vom vorbi cu altă ocazie.

ING. GH. VASILIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 8, Aprilie 1936. Proprietăţile geometrice ale mişcării unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăşi, când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe, sau când trei puncte descriu trei drepte fixe, de *N. Abramescu*. Scrierile Matematice ale lui *Gheorghe Lazăr*, de *Victor Marian*. Asupra unui grup de patru sfere tangente două câte două de *V. Thébault*. O teoremă din geometrica triunghiului, de *Alexandru V. Niculescu*. Două probleme, de Locot. *M. I. Focşeneanu*.

2. *Boletin Matematico*, anul IX, No 1, Martie 1936, Buenos Aires. O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, de *V. Alaci*. Triunghiul de prima specie, de *B. I. Baidaff*. Note Matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. *Ştiinţă şi Progres*. Revistă ştiinţifică a Liceelor Militare, anul III, No. 1, Aprilie 1936 Identităţi trigonometrice, de *N. N. Mihăileanu*. Relaţii între elementele într'un triunghiu, de *Năstase M*, cu o observare de *N. O. Z*. Din trecutul ocnelor de sare româneşti, de Dr. Ing. *M. I. Balea*. Scoica de mărgăritar, de *Ion Popu-Câmpeanu*. Bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

4. *Revista de Ciancias*, an. XXXVIII, No. 115, Martie 1936, Lima-Peru.

5. *Godofredo Garcia*. Viteza şi acceleraţia totală în coordonate absolute. (Lima-Peru, 1936)

6. *A. Gloden*. Asupra identităţilor numerice. (Madrid 1936.)

PROBLEME REZOLVATE

951. — *Să se găsească un patrat perfect egal cu suma cuburilor a trei numere progresie aritmetică.*

G-L GH. BUICLIU

Ecuaţia problemei este:

$$y^2 = (x-a)^3 + x^3 + (x+a)^3$$

$$\therefore \quad y^2 = 3x(x^2 + 2a^2)$$

De aci rezultă că y se divide prin 3, deci:

$$(1) \qquad 3z^2 = x(x^2 + 2a^2),$$

unul din factorii membrului al 2-lea trebuind să se dividă prin 3.

Numerile x şi $x^2 + 2a^2$ pot fi prime între ele, sau pot avea divizori. Să considerăm fie-care caz a parte.

Cazul I. x şi $x^2 + 2a^2$ sunt prime între ele Dacă u şi v sunt numere întregi, ecuaţiunea (1) cere neapărat:

$$(2) \quad \begin{cases} x = 3u^2 \\ x^2 + 2a^2 = v^2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad (3) \quad \begin{cases} x = u^2 \\ x^2 + 2a^2 = 3v^2 \end{cases}$$

Din (2) se scoate:

$$(3u^2)^2 + 2a^2 = v^2$$

şi problema se reduce la a rezolva în numere întregi ecuaţiunea de două necunoscute:

$$(4) \qquad v^2 - (3u^2)^2 = 2a^2,$$

când se cunoaşte a, sau ecuaţiunea de forma:

$$(5) \qquad x^2 + 2y^2 = z^2$$

când a nu este dat.

La fel din (3) se deduce:

$$(u^2)^2 + 2a^2 = 3v^2,$$

care conduce la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiunei de forma:

$$(6) \qquad 3x^2 - y^2 = 2a^2$$

când se cunoaşte a, sau a ecuaţiunei de 3 necunoscute:

$$(7) \qquad 3x^2 = z^2 + 2y^2$$

când a nu este dat.

Ecuaţiunile de forma (4) şi (6) de două necunoscute, se rezolvă pe calea pe care am dat-o la pag. 18 din *Revista Matematică din Timişoara* vol. XIV, unde am rezolvat în numere întregi ecuaţiunea:

$$4 + 81x^2 = 10y^2,$$

sau pe calea pe care o dă d-l Prof. *Gh. Constantinescu* în articolul *„Soluţiuni întregi ale ecuaţiunei“*.

$$y^2 - ay^2 = b$$

publicate în acest volum al revistei la pag 3, 17.

Ecuaţiunile omogene de 3 sau mai multe necunoscute de forma (5) sau (7), se rezolvă după metoda dată de d-l *I. B. Florescu* în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIX pag. 167, în articolul intitulat *„Asupra rezolvării în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul II cu n necunoscute“*.

Cazul II. x şi $x^2 + 2a^2$ *au divizori comuni.* Fie d un astfel de divizor. El va divide neapărat şi pe $2a^2$. Deci divizorii d de considerat, sunt *numai* divizorii lui $2a^2$. Presupun că d nu este patrat perfect. Ecuaţiunea (1) conduce, ca şi în cazul I la:

$$(8) \quad \begin{cases} x = 3du^2 \\ x^2 + 2a^2 = dv^2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad (9) \quad \begin{cases} x = du^2 \\ x^2 + 2a^2 = 3dv^2 \end{cases}$$

și problema revine la a rezolva în numere întregi ecuațiuni cu două necunoscute, de forma:

$(3du^2)^2+2a^2=dv^2$ sau $(du^2)^2+2a^2=3dv^2$,

în cazul când a este dat și $2a^2$ divizibil prin d, sau ecuațiuni de 3 necunoscute de forma (5) și (7) în care $x^2, 2y^2, z^2$ nu sunt prime în ansamblul lor.

Dacă d este un patrat perfect b^2, atunci produsul $x(x^2+a^2)$ este de forma mb^4, deci z^2 din (1) trebuie să fie de forma $b^4z'^2$, ceia ce face că după simplificarea prin b^4, (1) nu-și schimbă forma.

Iată câteva soluții pentru cazul particular $a=1$:

(α) $3^2=0^3+1^3+2^3$; $6^2=1^3+2^3+3^3$;

$204^2=23^3+24^3+25^3$

și o soluție pentru $a=4$:

(β) $48^2=4^3+8^3+12^3$.

Pentru $a=0$ avem numai soluția:

(γ) $9^2=3^3+3^3+3^3$.

Notă. Problema a fost încercată de 11 corespondenți pe căi ce nu merită a fi menționate.

1368. — *Să se stabilească identitatea*:

$$\prod_{k=0}^{3}\left[\cos x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}\right]^2+\sin^2 x\prod_{k=1}^{3}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{4}\right)^2=\frac{1}{64}.$$

V. ALACI

Soluție directă dată de d-l *Negrea A. Mircea* (Brăila).

Insemnând cu E primul membru, putem scri:

(1) $$E=P_1+\sin^2 x\cdot P_2,$$

unde:

$$P_1=\prod_{k=0}^{3}\left[\cos x-\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}\right]^2, \qquad P_2=\prod_{k=1}^{3}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{4}\right)^2.$$

Să calculăm P_1 și P_2, avem succesiv:

(2) $$P_1=\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\left(\cos x-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\left(\cos x-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2\left(\cos x-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2$$

$$=\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\left(\cos x-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\left(\cos x+\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2\left(\cos\ +\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$=\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2=\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2\left(\cos^2 x-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$=\left(\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{4}\right)^2=\left(\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{1}{8}\right)^2.$$

Apoi:

(3) $$P_2=\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\left(\cos x-\cos^2\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\cos x-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2=\cos^2 x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\left(\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$=\cos^2 x\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{\pi}{4}\right)^2=\cos^2 x\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)^2=\cos^2 x\left(\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{1}{4}\right).$$

Inlocuind în (1) valorile lui P_1 și P_2 date de (2) și (3), obținem:

$$E=\left(\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{1}{8}\right)^2+\sin^2 x\cos^2 x\left(\cos^4 x-\cos^2 x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \cos^2 x \sin^2 x\right)^2 + \sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{1}{4} - \cos^2 x \sin^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left[(1 - 2\sin^2 2x)^2 + 4\sin^2 2x\,(1 - \sin^2 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{64}(1 - 4\sin^2 2x + 4\sin^4 2x + 4\sin^2 2x - 4\sin^4 2x) = \frac{1}{64}.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Altă soluție. In articolul *„O metodă pentru calcularea unor produse trigonometrice"*, din „R. M. T.", vol. XIV, p. 137—140, sunt stabilite identitățile:

$$\cos n t = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\cos t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$$

$$\sin n t = 2^{n-1} \sin t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n}\right),$$

pe care ridicându-le la patrat și adunându-le obținem, împărțind ambii membrii prin 2^{2n-2}:

$$(4) \qquad \prod_{k=1}^{n-1} \left[\cos t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}\right]^2 + \sin^2 t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n-2}},$$

Această identitate, este generalizarea celei din enunț, astfel că luând aci, $n = 4$, $t = x$, obținem:

$$\prod_{k=0}^{3} \left[\cos x - \cos \frac{(2k+1)\pi}{8}\right]^2 + \sin^2 x \prod_{k=1}^{3} \left(\cos x - \cos \frac{k\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64},$$

identitatea cerută.

Soluție dată de d-ra: *Popescu N. Maria* (București) și de d-nii: *Amărăștеanu F. Marcel* (Craiova), *Anastasie Petrescu-Craiovița* (Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Șc. Milit. de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Of. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuș), *Panait Mircea*, *Popa Nicolaie* (lic. Beiuș), *Predoescu I. Marin* (Șc. Polit, Timișoara) și *Țarălungă Dimitrie* (lic. Milit., Tg-Mureș).

1369. — *Să se afle restul împărțirii prin 84 a expresiunii:*

$$E = 30\,(30^{3k+2} - 10 \times 30^{3k+1} + 6),$$

k fiind un întreg pozitiv.

EUGEN VISA

Expresia dată se mai poate scri:

$$E = 30^{3k+2}(30-10) \times 180 = 20 \times 30^{3k+2} + 2 \times 84 + 12.$$

Căutând acum restul lui E prin 84, avem succesiv:

$$\mathcal{R}\left(\frac{E}{84}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{20 \times 30^{3k+2}}{84}\right) + 12$$

$$= \mathcal{R}\left(\frac{4 \times 5 \times 3 \times 10 \times 30^{3k+1}}{12 \times 7}\right) + 12$$

$$= 12\,\mathcal{R}\left[\frac{50 \times (28+2)^{3k+1}}{7}\right] + 12$$

$$= 12\,\mathcal{R}\left(\frac{50 \times 2^{3k+1}}{7}\right) + 12$$

$$= 12\,\mathcal{R}\left[\frac{(49+1) \times 2^{3k+1}}{7}\right] + 12$$

$$= 12\,\mathcal{R}\left(\frac{2^{3k+1}}{7}\right) + 12 = 12\,\mathcal{R}\left(\frac{2 \times 8^k}{7}\right) + 12$$

$$= 12\,\mathcal{R}\left[\frac{2 \times (7+1)^k}{7}\right] + 12$$

$$= 12 \times \mathcal{R}\left[\frac{2 \times 1^k}{7}\right] + 12 = 12 \times 2 + 12 = 36.$$

Restul căutat este 36.

Soluții date de d-nii: *Amărăștеanu F. Marcel* (Craiova), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *V. Florescu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Grabovski Eugen* și *Moisovici Ștefan* (Colegiu Național, Craiova).

S'au primit încă câte-va soluții, greșite

1376. — *Notațiile fiind cele obicinuite, să se arate că în orice triunghiu avem relația:*

$$1 + \cos A \cos B \cos C = \frac{ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B}{4R^2}.$$

G. BOERESCU

Insemnând cu E al 2-lea membru şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

putem scri, simplicând prin $4R^2$:

$$(1) \quad E = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B = \sin B (\sin A \cos C + \sin C \cos A) + \sin C \sin A \cos B = \sin B \sin (A + C) + \sin C \sin A \cos B.$$

Dar, $\sin (A + C) = \sin B$, $A + C$ şi B fiind suplimentare şi atunci relaţia (1) devine:

$$(2) \quad E = \sin^2 B + \sin C \sin A \cos B = 1 - \cos^2 B + \sin C \sin A \cos B = 1 - \cos B (\cos B - \sin C \sin A),$$

Cum:

$$\cos B = -\cos (A + C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C,$$

B şi $A + C$ fiind suplimentare, rezultă că relaţia (2) se mai poate scri succesiv:

$$E = 1 - \cos B (-\cos A \cos C + \sin A \sin C - \sin C \sin A) = 1 + \cos A \cos B \cos C.$$

Astfel am găsit, că al 2-lea membru E al relaţiei date, este identic cu primul membru şi astfel am stabilit relaţia cerută.

Soluţii analoage date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Baumgartner I. Iosif*, *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisovici Ştefan* (Colegiu Naţional, Craiova), *Pădureţ I. Vasile* (lic. Milit, Chişinău), *Postelnicescu C. M.* (lic Milit., N. Filipescu), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

Alte soluţii date de d-nii: *Andrunachievici Vl.*, *Bucur I. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Florescu I. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Moisă I. Gheorghe* (student), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pambucdjian Kricov* (lic Constanţa), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş) şi *Popa Nicolae* (lic. Beiuş).

1381. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} xy + yz + zu = 11 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2u^2 = 49 \\ x^3y^3 + y^3z^3 + z^3u^3 = 251 \end{cases}$$

DUMITRU ŢARALUNGA

Ridicând prima ecuaţie pe rând la patrat şi la cub şi ţinând seamă de celelalte două ecuaţii, obţinem:

$$49 + 2xyz(x + y + z) = 121$$

$$251 + 3xyz(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3x^2y^2z^2 = 1331$$

Aceste ecuaţii se mai pot simplifica şi avem:

$$(1) \quad xyz(x + y + z) = 36$$

$$(2) \quad 33xyz(x + y + z) - 3x^2y^2z^2 = 1080.$$

Ecuaţia (2), ţinând seamă de (1) devine:

$$1188 - 3x^2y^2z^2 = 1080,$$

sau:

$$x^2y^2z^2 = \frac{1188 - 1080}{3} = 36.$$

De aci deducem:

$$xyz = \pm 6,$$

care introdus în (1) ne dă:

$$x + y + z = \pm 6.$$

Rezultă dar că sistemul dat este echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = -6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = -6 \end{cases}$$

Aceste sisteme ne dau, suma lui x, y, z, suma produselor lor câte două, precum şi produsul lor, de unde urmează că x, y, z sunt respectiv rădăcinele ecuaţiilor:

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0, \quad t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = 0.$$

Aceste ecuaţii, descompuse în factori se pot scri respectiv:

$$(t-1)(t-2)(t-3) = 0, \quad (t+1)(t+2)(t+3) = 0.$$

Rădăcinele acestor ecuaţii, deci acelea ale sistemului dat, formează următoarele sisteme de soluţii:

x	± 1	$+1$	± 2	$+2$	± 3	± 3
y	$+2$	$+3$	± 1	$+3$	$+2$	± 1
z	$+3$	$+2$	$+3$	$+1$	$+1$	$+2$

Soluţii date de d rile: *Popescu N. Maria* (Bucureşti), *Savin Mărioara* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Anastas'e Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova) *Cotescu Costel* (lic. Milit, Iaşi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit, de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisovici Ştefan* (Colegiu Naţional, Craiova), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Panait Mircea* (Şc Of. de Artilerie), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popoviciu I. Gavril* (lic. Carei) şi *Stoica N. D-tru* (lic Milit., Tg-Mureş).

1384. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se arate că:*

1°. *Dacă laturile lui sunt în progresie aritmetică, atunci* $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$, *sunt în progresie aritmetică.*

2°. *Dacă pătratele laturilor lui sunt în progresie aritmetică, atunci şi* cot A, cot B, cot C, *sunt în progresie aritmetică.*

CEZAR IVANESCU

1°. Laturile a, b, c fiind în progresie aritmetică, putem scri:

$$a = b - r, \qquad c = b + r,$$

pe care adunându-le obţinem:

$$a + c = 2b.$$

Această relaţie se mai poate scri:

$$(p - a) + (p - c) = 2(p - b),$$

sau încă:

$$(1) \qquad \frac{p-a}{r} + \frac{p-c}{r} = 2\frac{p-b}{r}.$$

De altă parte cunoaştem relaţiile:

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \qquad \cot\frac{B}{2} = \frac{p-b}{r},$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}$$

(„Compléments de Trigonométrie" par F. G. M., p. 176), astfel că relaţie (1) devine:

$$(2) \qquad \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}.$$

Dacă luăm:

$$(3) \quad \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{B}{2} - k, \qquad \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{B}{2} + k,$$

relaţia (2) este satisfăcută

Relaţiile (3) *însă invederează, că:*

$$\cot\frac{A}{2}, \quad \cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{C}{2},$$

sunt în progresie aritmetică.

2°. a^2, b^2, c^2 fiind în progresie aritmetică, avem:

$$a^2 = b^2 - r, \qquad c^2 = b^2 + r,$$

de unde rezultă:

$$a^2 + c^2 = 2b^2.$$

Aceasta relaţie se mai poate scrie evident:

$$(4) \quad (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + b^2 - c^2) = 2(c^2 + a^2 - b^2).$$

De altă parte cunoaştem relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

care se mai poate scri:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2(bc\sin A)\cot A =$$

$$b^2 + c^2 - 4s\cot A,$$

şi alte două relaţii analoage. Din aceste relaţii scoatem:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 4s\cot A$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 4s\cot C$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = 4s\cot B.$$

In virtutea acestor relaţii, (4) devine simplicând cu $4s$:

$$(5) \qquad \cot A + \cot C = 2\cot B.$$

Dacă luăm:

(6) $\cot A = \cot B - k, \qquad \cot C = \cot B + k,$

relaţia (5) este satisfăcută. *Relaţiile* (5) *însă înve-derează, că* cot A, cot B, cot C, *sunt în progresie aritmetică.*

Soluţie dată de d-l: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova).

Alte soluţii date de d nii: *Anastasie Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Berinde Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M*, *Rajka Z.* (lic. Orăstie) şi *Rosenberg I.* (lic. Roman).

PROBLEME PROPUSE

1481. — In ce sistem de numeraţie, un număr de patru cifre de forma $aabb$ poate să fie patratul numărului de două cifre cc, fiind dat că a şi b trebuesc să fie cifre de aceiaşi paritate, consecutive.

V. Thébault

1482. — Să se găsească un patrat perfect de şase cifre, astfel ca numărul format de ultima grupă de două cifre, să fie diferenţa dintre numărul format de grupa de două cifre de la mijloc şi numărul format de prima grupă de două cifre.

V. Alaci

1483. — Muncitorii $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$, se angajează la reparatul unui d g. Ştiind că:

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, împreună, termină lucru în $\frac{1}{a_1}$ zile

$A_2, A_3, \ldots, A_n$, „ „ „ „ $\frac{1}{a_2}$ „

. . . . . .

$A_n, A_1, \ldots A_{n-2}$, împreună, termină lucru în $\frac{1}{a_n}$ zile,

se întreabă:

1°. In câte zile se va termina reparatul digului, dacă vor lucra toţi muncitorii deodată?

2°. In câte zile vor termina acelaş lucru, un număr oarecare m din acei muncitori?

Ion Margineanu

1484. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x+y)(x^3+y^3) - (x+y)^2 xy = a \\ x^4 + y^4 = b \end{cases}$$

Sub.-Lt. Ioan C. Savin

1485. — Se consideră triunghiurile ABC înscrise în cercul dat cu centru O şi având toate acelaşi ortocentru H. Să se arate că aceste triunghiuri ABC sunt circumscrise la o elipsă cu focarele O şi H şi având ca cerc director cercul dat. Să se arate că cercul principal al elipsei, este cercul celor nouă puncte al triunghiurilor ABC.

N. Abramescu

1486. — Se dă unghiul la centru AOB în un cerc de rază dată şi se cere să se construiască un patrat $MNPQ$, care să aibă vârfurile M, N pe cercul AB şi câte unul din celelalte vârfuri pe razele OA şi OB.

G-l Gh. Buicliu

1487. — Intre unghiurile unui triunghiu, avem relaţiile:

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = 1 + \sec A \sec B \sec C$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) = 1 + \operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$$

$$(\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C)(\operatorname{cotg} 2A + \operatorname{cotg} 2B + \operatorname{cotg} 2C) = 1 - \sec 2A \sec 2B \sec 2C$$

N. N. Mihaileanu

1488. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} - \frac{1}{4}\sum \frac{(r_a - r)(r_b - r)}{r_a r_b} = 1.$$

M I. Predoescu

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăşteanu M. F. (P), *Baumgarten I. Iosif* (1388, 1389), *Cioc I. Dumitru* (1468, 1470, 1471), *Davidovici Paul* (1471, 1465, 1170, 1476), *Deceanu Gh.* (1216), *Florescu L. Victor* (1417), *Gloden A.* (P, 1458, 1463), *Giţescu Spiridon* (P), *Hermann Al. Victor* (1409, 1425, 1439, 1449, 1451, 1462), *Kornis Ernest* (P., 1465, 1472, 1473, 1476, 1479, 1480), *Lăzărescu Stelian* (1418, 1424), *Matei D. Dumitru* (P, 1381, 1338, 1414, 1470), *Mihăileanu N. N.* (P), *Moisovici Ştefan* (1410, 1413, 1451), *Păduret Vasile* (1389, 1400, 1401, 1405, 1408, 1413, 1420), *Ripianu Andrei* (1474, 1475), *Rosenberg I.* (1410, 1424, 1439, 1465), *Savin Marioara* (1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1473, 1476), *Segol Zigu* (1465, 1468, 1470, 1471), *Ştefănescu D. Nicolae* (1402, 1403, 1417, 1418, 1421, 1424), *Ţaralungă Dimitrie* (1400, 1408, 1420, 1424, 1439, 1444, 1447, 1451, 1452 1456, 1465, 1466, 1470), *Thébault V.* (N., P.), *Veşcan T.* (A), *Vlad M. C. D.* (P., 1465, 1476, 1479).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 IUNIE 1936 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 12 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 G. G. CONSTANTINESCU; ASUPRA UNOR PROBLEME DE ARITMETICA.
2. CEZAR IVANESCU. ASUPRA UNUI TRIUNGHIU.
3. NOTE MATEMATICE: 6, 7, 8.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 174, 1337, 1374, 1383, 1397.
6. PROBLEME PROPUSE: 1489-1496.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE ARITMETICĂ

DE G. G. CONSTANTINESCU
(Tecuci)

In cele ce urmează vreau să arăt cum unele problemele de Aritmetică, privitoare la divizibilitatea unei expresii aritmetice printr'un număr dat, pot fi foarte ușor rezolvate pe cale algebrică și anume prin transformarea problemei aritmetice într'una de divizibilitate algebrică.

1. Voiu considera în primul rând problema 1312, a cărei soluție a fost publicată în R. M. T., Vol. XV, pag. 46 și în care se cerea să se dovedească divizibilitatea expresiei aritmetice:

$$4^{2p} \times 16^{3p} - 2^{8p+1} + 1$$

prin $289 = 17^2$, p fiind un număr întreg și pozitiv.

Voiu nota:

$$17 = x$$

și voiu observa că am în urma acestei notații:

$$4^{2p} = (x-1)^p \; ; \qquad 16^{3p} = (x-1)^{3p} \; ;$$

$$2^{8p+1} = 2(x-1)^{2p},$$

așa încât expresiunea dată devine:

$$(1) \quad (x-1)^{4p} - 2(x-1)^{2p} + 1 = [(x-1)^{2p} - 1]^2,$$

care este evident divizibilă prin x, deoarece pentru $x = 0$, avem:

$$[(-1)^{2p} - 1]^2 \equiv 0,$$

Formând derivata primă în raport cu x a expresiei (1), avem:

$$4p(x-1)^{4p-1} - 4p(x-1)^{2p-1},$$

polinom, care este evident divizibil prin x, căci pentru $x = 0$, avem:

$$4p(-1)^{4p-1} - 4p(-1)^{2p-1} \equiv 0$$

și deci polinomul dat în (1) și prima sa derivată anulându-se pentru $x = 0$, rezultă că el este divizibil prim x^2, adică rezultă că expresia aritmetică, pe care am considerat'o, este divizibilă prin $17^2 = 289$.

2. In al doilea rând voiu considera problema 1296 soluționată în „R. M. T.“, Vol. XV, pag. 71 și în care se cerea să se dovedească divizibilitatea expresiei aritmetice:

$$625^{2p+1} + 4 \times 125^{2p+1} + 150 \times 25^{2p} + 20 \times 5^{2p} + 1,$$

prin $1296 = 6^4$, p fiind un număr întreg pozitiv.

Urmând principiul precedent, voiu pune:

$$6 = x$$

și voiu avea atunci:

$$625 = 5^4 = (x-1)^4 \; ; \qquad 125 = 5^3 = (x-1)^3 \; ;$$

$$25 = 5^2 = (x-1)^2,$$

$20 = 4x$:

$$150 = 6.5^2 = 6(x-1)^2 \; ; \qquad 5 = x - 1,$$

așa că expresia aritmetică va lua forma algebrică:

$$(x-1)^{8p+4} + 4(x-1)^{6p+3} + 6(x-1)^{4p+2} + 4x^{2p+1} + 1,$$

sau:

$$[(x-1)^{2p+1} + 1]^4 = P^4(x).$$

Acest polinom este divizibil prin x^4 deoarece atât el cât și primele sale trei derivate în raport cu x, anume:

$$4P^3(x)P'(x),$$

$$12P^2(x)P'^2(x) + P^3(x)P''(x),$$

$$24P(x)P'^3(x) + 48P^2(x)P'(x)P''(x) + 4P^3(x)P'''(x.$$

admit în factor expresia:

$$P(x) = (x-1)^{2p+1} + 1,$$

care pentru $x = 0$ devine identic nulă.

Rezultă deci că expresia aritmetică considerată este şi ea divizibilă prin 6^4, adică ceace trebuia să demonstrăm.

3. — In fine pentru a termina, voiu mai considera drept exemplu problema 1353 rezolvată în „R. M. T.", Vol. XV, pag. 107 şi în care se cerea să se arate că fracţia:

$$\frac{31 \times 2^{2p+1} + 1}{19 + 4^{2p+1} - 1}$$

se poate simplifica prin 3, p fiind întreg şi pozitiv.

Notând:

$$3 = x$$

şi observând că:

$$31 = 10x + 1\,;\quad 2 = x - 1\,;\quad 19 = 6x + 1\,;\quad 4 = x + 1,$$

expresiunea aritmetică devine:

$$\frac{(10x+1)(x-1)^{2p+1} + 1}{(6x+1)(x+1)^{2p+1} - 1},$$

care se simplifică prin x deoarece atât numărătorul cât şi numitorul fracţiei sunt polinoame divizibile prin x, căci pentru $x = 0$ ei se anulează, avându-se în adevăr:

$$(-1)^{2p+1} + 1 \equiv 0$$

$$(+1)^{2p+1} - 1 \equiv 0$$

şi astfel socot cum că am exemplificat utilizarea unei metode algebrice, pentru rezolvarea unor probleme aritmetice.

ASUPRA UNUI TRIUNGHIU

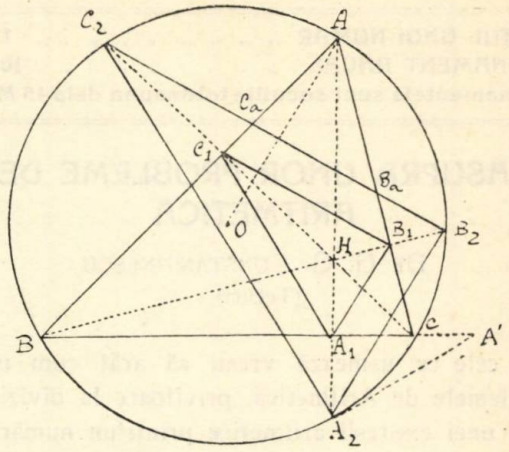
de CEZAR IVANESCU

Fie ABC un triunghiu oarecare înscris în cercul O şi A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor lui, iar A_2, B_2, C_2 punctele unde aceste înălţimi tae cercul circumscris. Să ne fixăm atenţia asupra triunghiului $A_2B_2C_2$.

a. Insemnând prin H ortocentrul triunghiului ABC, se ştie că:

$$HA_1 = A_1A_2, \qquad HB_1 = B_1B_2, \qquad HC_1 = C_1C_2,$$

rezultă de aci că triunghiul ortic al lui ABC şi triunghiul $A_2B_2C_2$ sunt asemenea şi asemenea aşezate, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.



Vom arată cum putem deduce multe din proprietăţile triunghiului ortic, pe o cale mai simplă, şi anume servindu-ne de faptul că este asemenea cu $A_2B_2C_2$.

1. Triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ fiind înscrise în acelaş cerc de rază R, rezultă ţinând seama de a., că raza R' a cercului circumscris triunghiului ortic este egală cu $\frac{R}{2}$.

2. Unghiurile ABB_2 şi ACC_2 fiind ambele de $90^0 - A$, rezultă că:

$$\text{arc } AB_2 = \text{arc } AC_2.$$

Deci dreapta AA_2, este bisectoarea unghiului $B_2A_2C_2$.

Analog dreptele BB_2 şi CC_2 sunt bisectoarele unghiurilor $C_2B_2A_2$ şi $A_2C_2B_2$.

Şi, având în vedere cele stabilite în a., deducem: înălţimile unui triunghiu sunt bisectoarele triunghiului său ortic.

3. Deoarece $\text{arc } AB_2 = \text{arc } AC_2$, perpendiculara coborâtă din A pe B_2C_2, trece prin centrul O al cercului circumscris. Analog şi pentru vârfurile B şi C.

Această proprietate, ţinând seama de a., se poate enunţa în modul următor: razele OA, OB, OC sunt perpendiculare respectiv pe laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ale triunghiului ortic.

Tot din 3. deducem că: tangentele duse cercului O respectiv prin A, B, C, sunt paralele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ortic.

4. In triunghiul $A_2 B_2 C_2$ avem:

$$B_2 C_2 = 2 R \sin \widehat{B_2 A_2 C_2}.$$

Dar:

$$\widehat{B_2 A_2 C_2} = \widehat{A B B_2} + \widehat{A C C_2} = 180^0 - 2 A.$$

Deci:

$$B_2 C_2 = 2 R \sin (180^0 - 2 A) = 2 R \sin 2 A = 2 a \cos A.$$

Analog avem:

$$C_2 A_2 = 2 b \cos B, \qquad A_2 B_2 = 2 c \cos C.$$

Cum laturile triunghiului ortic sunt jumătăţile laturilor triunghiului $A_2 B_2 C_2$, rezultă că avem:

$$B_1 C_1 = a \cos A, \quad C_1 A_1 = b \cos B, \quad A_1 B_1 = c \cos C.$$

5. Tot astfel putem arăta că triunghiurile $A B_1 C_1$, $B C_1 A_1$ şi $C A_1 B_1$, exterioare triunghiului ortic, sunt asemenea cu $A B C$.

Insemnând cu B_a şi C_a punctele unde latura $B_2 C_2$ tae pe $A C$ şi $A B$ putem scri:

$$\widehat{A B_a C_a} = \widehat{C B B_2} + \widehat{A C C_2} = B.$$

Triunghiul $A B_a C_a$ şi prin urmare şi $A B_1 C_1$ este asemenea cu $A B C$. Pentru celelalte triunghiuri, demonstraţie analoagă.

Am stabilit astfel câteva din proprietăţile triunghiului $A_2 B_2 C_2$, asemenea cu ale triunghiului ortic.

In afară de acestea, el se bucură încă de următoarele:

6. Tangentele duse cercului O prin vârfurile lui, întâlnesc laturile triunghiului $A B C$, în trei puncte colineare.

Pentru a demonstra aceasta, ne servim de teorema: tangenta în vârful unui triunghiu determină pe latura opusă segmente proporţionale cu patratele laturilor ce pleacă din acel vârf.

Insemnând prin A' punctul unde tangenta dusă prin A_2 tae pe $B C$, putem scri:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A_2 B^2}}{\overline{A_2 C^2}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{HB^2}}{\overline{HC^2}}.$$

Scriind şi celelalte două relaţii pentru B' şi C' analoagele lui A' şi apoi înmulţind găsim:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1,$$

adică tocmai ceeace trebuia demonstrat.

7. Insfârşit ca o consecinţă imediată a celor stabilite la punctul 2., deducem că laturile $B C$, $C A$, $A B$ formează respectiv cu $A_2 B_2$ şi $A_2 C_2$, $B_2 C_2$ şi $B_2 A_2$, $C_2 A_2$ şi $C_2 B_2$ trei triunghiuri isoscele.

NOTE MATEMATICE

6. — *Sur des carrés curieux.*

1. Supposons que dans un système de numération de base B, le nombre:

$$N = a\,a\,a\,a\,b\,b = (B+1).(a B^4 + a B^2 + b),$$

formé de six chiffres différents de zéro et plus petits que B, soit un carré parfait. Si la base B est un nombre plus grand que 4, tel que $B+1 = k^2$, k étant entier, il en résulte que, faisant $a = 4$, $b = 1$, on a déjà:

$$N = (B+1).(2 B^2 + 1)^2 = [k.(2 B^2 + 1)]^2.$$

Par suite, comme k^2 peut être un carré quelconque, plus grand que 4, *il existe une infinité de systèmes de numération dans lesquels il y a des carrés de six chiffres de la forme* $aaaabb \equiv 444411$.

Les premières valeurs.

$$B = 8, \quad 15, \quad 24, \quad 35, \ldots,$$

donnent:

$$N = 444411 = 603^2, \quad N = 444411 = 804^2, \ldots$$

2. *Plus généralement*, le nombre:

$$M = a B^4 + a B^2 + b$$

est carré parfait si:

$$a = 2^{2n}, \qquad b = 2^{2(n-1)},$$

n étant un entier quelconque, et $B > 2^{2n}$, car:

$$M = 2^{2n} B^4 + 2^{2n} B^2 + 2^{2(n-1)} = [2^{n-1}.(2 B^2 + 1)]^2.$$

Dès lors, dans un système de numération où la base B est telle que le nombre $B+1$ est un carré k^2 plus grand que 2^{2n}, le nombre de six chiffres:

$$N = 2^{2n}\,2^{2n}\,2^{2n}\,2^{2n}\,2^{2(n-1)}\,2^{2(n-1)} =$$

$$(B+1).[2^{n-1}.(2B^2+1)]^2 = [k.2^{n-1}.(2B^2+1)]^2,$$

est un carré parfait. Ainsi, le nombre:

$$N = 444411$$

est un carré dans tous les systèmes de numération de bases $B = 8, 15, 24, 35, \ldots$, mais la démonstration ne permet pas de dire que pour un de ces systèmes de numération le carré trouvé est le seul répondant à la question. Ainsi, lorsque $B = 8$, le carré:

$$N = 666644 = 732^2$$

est de la forme envisagée.

3. Par un raisonnement analogue, on observe que le nombre de six chiffres:

$$N' = 2^{2(n-1)}\,2^{2(n-1)}\,2^{2n}\,2^{2n}\,2^{2n}\,2^{2n} =$$

$$(B+1).[2^{n-1}.(B^2+2)]^2.$$

Ceci prouve, dans l'hypothèse où $B+1$ est le carré d'un entier plus grand que 2^{2n}, que le nombre N' est aussi carré parfait.

Les carrés N *et* N' *sont des nombres renversés ainsi que leurs racines:*

$$n = \overline{2k}\,0\,\overline{k}, \qquad n' = \overline{k}\,0\,\overline{2k}.^{1)}$$

4. Enfin, si l'on pose:

$$a = 2^{2n}.m^2, \qquad b = 2^{2(n-1)}.m^2,$$

m étant un entier quelconque, et $B > 2^{2n}.m^2$, on obtient les carrés de six chiffres:

$$N = aaaabb = [km.2^{n-1}.(2B^2+1)]^2$$

$$N' = bbaaaa = [km.2^{n-1}.(B^2+2)]^2,$$

de formes plus générales encore.

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

7. — *Asupra unui nou simbol utilizabil în domeniul teoriei numerelor.*

1°. In articolul *„Determinarea unei funcțiuni periodice de variabilă întreagă"* (R. M. T., Vol. XIV, pag. 113), cu ocazia unei aplicații, am întrodus simbolul $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$ pe care l-am definit ca reprezentând restul împărțirii numerelor întregi m și n, în ordinea scrisă.

Cu altă ocazie am stabilit apoi împreună cu *D-l I. V. Mătieș*[1] patru proprietăți ale acestui simbol exprimate respectiv prin relațiile:

$$(1) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\Sigma m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\Sigma\,\mathcal{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)}{n}\right]$$

$$(2) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\Pi m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\Pi\,\mathcal{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)}{n}\right]$$

$$(3) \qquad \mathcal{R}\left(\frac{km}{kn}\right) = k.\,\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$(4) \qquad \mathcal{R}\left[\frac{(an+b)^p}{n}\right] = \mathcal{R}\left(\frac{b^p}{n}\right).$$

Se poate dovedi însă că simbolul $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$ satisface încă și următoarelor relații:

$$(5) \qquad \mathcal{R}\left[\frac{f(m)}{n}\right] = \mathcal{R}\left\{\frac{f\left[\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)\right]}{n}\right\}$$

$$(6) \qquad \mathcal{R}\left[\frac{f(m_1, m_2, \ldots, m_i)}{n}\right] = \mathcal{R}\left\{\frac{f\left[\mathcal{R}\left(\frac{m_1}{n}\right), \mathcal{R}\left(\frac{m_2}{n}\right), \ldots, \mathcal{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)\right]}{n}\right\},$$

în care $f(m)$ și $f(m_1, m_2, \ldots, m_i)$ sunt polinoame cu coeficienți întregi pozitivi sau negativi.

In particular relația (6) ne conduce la o proprietate simplă asemănătoare celei exprimate prin relația (1) și anume:

$$(6') \qquad \mathcal{R}\left(\frac{\Sigma a_i m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\Sigma a_i\,\mathcal{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)}{n}\right].$$

2°. Simbolul $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$ se poate face destul de comod să intervină în definiția noțiunii de *congruență*.

Intr'adevăr, a și b fiind două numere întregi oarecari, vom zice că aceste numere sunt congru-

[1]) $\overline{2k}, 0, \overline{k}$ sont les trois chiffres de n et n'.

[1]) A se vedea articolul nostru *„Restul împărțirii numerelor întregi"* (R. M. T, Vol. XV, pag. 97).

ente în raport cu un al treilea număr întreg m numit *modul*, dacă avem satisfăcută relaţia:

$$(7)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{a}{m}\right)=\mathcal{R}\left(\frac{b}{m}\right)$$

sau relaţia echivalentă:

$$(7')\qquad \mathcal{R}\left(\frac{a-b}{m}\right)=0.$$

Un rezultat remarcabil, care decurge din această definiţie, este simplificarea ce intervine în enunţarea şi stabilirea diferitelor proprietăţi ale congruenţelor.

Astfel fie pentru exemplu teorema, care spune că *cei doui termeni ai unei congruenţe se pot înmulţi cu un acelaş număr întreg fără ca congruenţa să se strice.*

Utilizând notaţia simbolică $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$, lucrul acesta se poate exprima mult mai simplu spunând că relaţia (7) atrage după sine relaţia:

$$(8)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{k\,a}{m}\right)=\mathcal{R}\left(\frac{k\,b}{m}\right),$$

unde k este deasemenea un număr întreg.

Cât priveşte demonstrarea acestei proprietăţi, nici ea nu este mai puţin simplă.

Intr'adevăr, conform proprietăţii (6'), putem scrie:

$$(9)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{k\,a}{m}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{k\,\mathcal{R}\left(\frac{a}{m}\right)}{m}\right]$$

$$(10)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{k\,b}{m}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{k\,\mathcal{R}\left(\frac{b}{m}\right)}{m}\right].$$

Dar în virtutea relaţiei (7), relaţia (10) devine:

$$(11)\qquad \mathcal{R}\left(\frac{k\,b}{m}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{k\,\mathcal{R}\left(\frac{a}{m}\right)}{m}\right],$$

de unde comparând relaţiile (9) şi (11), relaţia (8) apare imediat.

3°. *Concluzii.* Din aceste consideraţiuni succinte, cred că rezultă clar, utilitatea simbolului $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$, utilitate care constă mai ales în faptul că servindune de el, reprezentarea multiplelor proprietăţi ale numerelor întregi se face într'un mod mult mai natural şi mai intuitiv decât în cazul altor convenţiuni.

Date fiind aceste constatări, se poate presupune că încetăţenirea simbolului $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$ în domeniul teoriei numerelor n'ar avea de întâmpinat dificultăţi prea mari.

EUGEN VISA

8. — *Asupra unor identităţi trigonometrice.*

Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu oarecare A B C, atunci:

$$(1)\qquad A+B+C=180^0.$$

a. La ambii membri ai egalităţii (1) scădem şi adunăm succesiv 2 C, şi-i împărţim la 2, găsim:

$$\frac{A+B-C}{2}=90^0-C$$

$$\frac{A+B+3C}{2}=90^0+C.$$

De unde:

$$(2)\begin{cases}\cos\dfrac{A+B-C}{2}=\cos(90^0-C)=\sin C\\ \cos\dfrac{A+B+3C}{2}=\cos(90^0+C)=-\sin C.\end{cases}$$

In mod analog:

$$(2')\begin{cases}\cos\dfrac{A+C-B}{2}=-\cos\dfrac{A+C+3B}{2}=\sin B\\ \cos\dfrac{B+C-A}{2}=-\cos\dfrac{B+C+3A}{2}=\sin A\end{cases}$$

Egalităţile:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

devin:

$$(3)\quad \frac{a}{\cos\frac{A+B-C}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{B+C-A}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{C+A-B}{2}}=$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sum \cos^2 \frac{A+B+3C}{2}} = \frac{a+b+c}{\sum \cos \frac{A+B-C}{2}}.$$

b. La ambii membri ai egalității (1) scădem și adunăm succesiv 4C, și-i împărțim la 2, găsim:

$$\frac{A+B-3C}{2} = 90^0 - 2C$$

$$\frac{A+B+5C}{2} = 90^0 + 2C.$$

De unde:

$$(4)\quad \begin{cases} \sin \frac{A+B-3C}{2} = \sin(90^0 - 2C) = \cos 2C \\ \sin \frac{A+B+5C}{2} = \sin(90^0 + 2C) = \cos 2C. \end{cases}$$

In mod analog:

$$(4')\quad \begin{cases} \sin \frac{A+C-3B}{2} = \sin \frac{A+C+5C}{2} = \cos 2B \\ \sin \frac{B+C-3A}{2} = \sin \frac{B+C+5A}{2} = \cos 2A \end{cases}$$

Deasemeni:

$$(5)\quad \begin{cases} 1+\sin \frac{A+B-3C}{2} = 1+\sin \frac{A+B+5C}{5} \\ \qquad = 1+\cos 2C = 2\cos^2 C \\ 1-\sin \frac{A+B-3C}{2} = 1+\sin \frac{A+B+5C}{2} \\ \qquad = 1-\cos 2C = 2\sin^2 C, \end{cases}$$

circular se află și celelalte 4 relații.

Se vede ușor că se pot scrie identitățile:

$$(6)\quad \begin{cases} 3+\sum \sin \frac{A+B-3C}{2} = 3+\sum \sin \frac{A+B+5C}{2} \\ \qquad = 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \\ 3-\sum \sin \frac{A+B-3C}{2} = 3-\sum \sin \frac{A+B+5C}{2} \\ \qquad = 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \end{cases}$$

Din (5) se poate scoate:

$$(7)\quad \begin{cases} \cos C = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sin \frac{A+B-3C}{2}\right)} \\ \qquad = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sin \frac{A+B+5C}{2}\right)}, \cdots \\ \sin C = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sin \frac{A+B-3C}{2}\right)} \\ \qquad = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sin \frac{A+B+5C}{2}\right)}, \cdots \\ \operatorname{tg} C = \pm\sqrt{\frac{1-\sin \frac{A+B-3C}{2}}{1+\sin \frac{A+B-3C}{2}}} = \\ \qquad \sqrt{\frac{1-\sin \frac{A+B+5C}{2}}{1+\sin \frac{A+B+5C}{2}}}, \cdots \end{cases}$$

c. La ambii membri ai egalității (1) adunăm și scădem succesiv 3C, și-i împărțim la 3, avem:

$$\frac{A+B-2C}{3} = 60^0 - C.$$

De unde:

$$\sin \frac{A+B-2C}{3} = \sin(60^0 - C) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos C - \sin C)$$

Ridicând ambii membri la patrat:

$$\sin^2 \frac{A+B-2C}{3} = \frac{1}{4}(3\cos^2 C + \sin^2 C - \sqrt{3}\sin 2C)$$

Ținând seama de (4) și (5) se găsește:

$$(8)\qquad 4\sin^2 \frac{A+B-2C}{3} = 2 + \sin \frac{A+B-3C}{2} - \sqrt{3}\cos \frac{A+B-3C}{2}.$$

Analog:

$$(8')\quad \begin{cases} 4\sin^4 \frac{A+C-2B}{3} = 2 + \\ \sin \frac{A+C-3B}{2} - \sqrt{3}\cos \frac{A+C-3B}{2} \\ 4\sin^2 \frac{B+C-2A}{3} = 2 + \\ \sin \frac{B+C-3A}{2} - \sqrt{3}\cos \frac{A+C-3A}{2} \end{cases}$$

Adunând relaţiile (8) se găseşte:

$$(9)\quad \begin{cases} 4\sum \sin^2\dfrac{A+C-2B}{3} = 8+ \\ \sum \sin\dfrac{A+C-3B}{2} - \sqrt{3}\sum \cos\dfrac{A+C-3B}{2} \end{cases}$$

d. Relaţia (1) se mai poate scri:

$$\frac{A+B-5C}{6} = 30^0 - C,$$

de unde:

$$\cos\frac{A+B-5C}{6} = \cos(30^0 - C) =$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos C + \sin C).$$

Ridicând la patrat se găseşte:

$$\cos^2\frac{A+B-5C}{6} = \frac{1}{4}(3\cos^2 C + \sin^2 C + \sqrt{3}\sin 2C)$$

Ţinând seamă de (4) şi (5), se găseşte:

$$4\cos^2\frac{A+B-5C}{6} = 2+$$

$$\sin\frac{A+B+5C}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{A+B+5C}{2}$$

Analog:

$$(10)\quad \begin{cases} 4\cos^2\dfrac{B+C-5A}{6} = 2+ \\ \sin\dfrac{B+C+5A}{2} - \sqrt{3}\cos\dfrac{B+C+5A}{2} \\ 4\cos^2\dfrac{C+B-5B}{6} = 2+ \\ \sin\dfrac{C+A+5B}{2} - \sqrt{3}\cos\dfrac{C+A+5B}{2} \end{cases}$$

Adunând relaţiile (10), se găseşte:

$$(11)\quad 4\sum\cos^2\frac{A+B-5C}{6} = 8+$$

$$\sum\sin\frac{A+B+5C}{2} - \sqrt{3}\sum\cos\frac{B+A+5C}{2}$$

In mod analog se pot obţine foarte multe identităţi între unghiurile unui triunghiu, cele de mai sus, având scopul de-a indica metoda de obţinere a acestor identităţi

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 9, Mai 1936. Rezultatele concursului „Gazetei Matematice" de *Gh. Ţiţeica*. Scrierile metematice ale lui *Gheorghe Lazăr* (urmare), de *Victor Marian*. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol, de *D. Barbelian*. Asupra problemelor 1386 şi 2889, de *M. Ghermănescu*. Asupra unui triunghiu special, de *Ilie Ioan Ţiţeica*.

2. *Boletin Matematico*, anul IX, No. 2, April 1936, Buenos Aires Asupra divizibilităţei, de *M. O. Gonzales*. Construcţia grafică a curbei derivate, de *I. S. Antoniu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. *Sphinx*, anul VI, No. 5, Mai 1936, Bruxelles. Precursori ilustri, de *G. Fistie*. Excursie recreativă în ţara lui *Einstein*, de *M. Volberg*. Asupra lănţisorului de cea mai mică tensiune extremală.

4. *Ştiinţă şi Progres*. Revista ştiinţifică a Liceelor Militare, anul III, No. 2, Mai 1936. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de Prof. *Radu Bădescu*. Baloanele sonde, de *Traian J. Codreanu*. Noutăţi, publicaţii noui, probleme rezolvate şi propuse.

5. *Gazeta Matematică, supliment cu exerciţii*, anul II, N-rile 6, 7, 8, 9. Exerciţii rezolvate şi propuse.

6. *Numerus*, revistă de matematici elementare, vol. I, caietele 9 şi 10, Februarie 1936. Portrete matematice, *Spiru Haret*. Chestiuni de examen. Probleme propuse. La géométrie du triangle, par *Tr. Lalesco* (urmare).

7. *Revista cercului de studii al Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara*, anul V, No. 4, Aprilie 1936. (Litografiat.) Criterii de comparaţie, de Ing *I. C. Schileru*. Pagina matematică.

8. *Pl. Andronescu*. Das Problem der Dimensionen der Einheiten elektrischer und magnetischer Grössen. (Archiv für Elektrotechnik, XXX Band, 1936.

INFORMAŢII.

La *Societatea Ştiinţifică de la Şcoala Politehnică din Timişoara*, a avut loc în cursul anului 1935–1936 următoarele comunicări:

Luni, 11 Nov. 1935:

1. *Prof. V. Ala i:* Dare de seamă despre mersul Soc. Ştiinţifice dela şcoala noastră, pe anul 1934—35.
2. *Conf. Ing. L. Stoicescu*: O observaţie asupra aparatului *Kirschniok* şi o rectificare.
3. *Rector Ing. C. Teodorescu:* Recepţia şinelor.

Luni, 16 Dec. 1935:

1. *Conferenţiar Dr. R. Răduleţ:* Sudare electrică prin puncte.
2. *Prof. V. Alaci:* Asupra unor funcţiuni simple discontinue şi continue reprezentate segmentar prin diferite arce de curbe.

Luni, 20 Ian. 1936:

1. *Asist Ing. Ion Suhov*: Omul neolitic din Cernavodă.

2. *Prof. Ing. V. Patriciu:* Bogăţiile miniere din Abisinia.

Marţi, 11 Febr. 1936:

1. *Prof. P. Sergescu:* O teoremă importantă a lui *Van Vleck.*

Vineri, 21 Febr. 1936:

1. *Asist. Dr. Caius Iacob:* Asupra metodei D-lui *Tchapliguine* pentru studiul curenţilor gazoşi.
2. *Prof. Ing. Ilie Popescu:* Zăcăminte de aur neexploatate.

Luni, 16 Martie 1936:

1. *Conf. Ing. Lazăr Stoicescu:* Construcţia curbei de emisie anticipată la maşinile cu echicurent.
2. *Prof. Ing. D Leonida:* Ce cunoştinţe se cereau inginerilor cu câteva secole în urmă.

Luni, 18 Mai 1936.

1. *Conf. Ing. L. Stoicescu:* Momentul de începere a compresiei în maşinile de vapori cu piston.
2. *Prof. V. Alaci:* Ecuaţiile analitice a diferitelor configuraţii discontinue sau continue.
3. *Prof. V. Alaci:* Cuvânt de închidere.

Asociaţia profesorilor de Matematici din Timişoara, a ţinut în cursul anului 1935 - 36, următoarele şedinţe:

Luni, 25 Nov. 1935:

1. *Prof. V. Alaci:* Cuvânt de deschidere.
2. *Prof. O. Ţino:* O chestiune de didactică.
3. *Prof. V. Alaci:* Condiţiile ca rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea să aibă o anumită situaţie faţă de numere date.

Vineri, 20 Dec. 1935:

1. *Prof. E. Csilcser:* Extensiunea domeniului de aplicaţie a teoremei lui *Descartes* în algebră.
2. *Prof. E. Mihai:* Scadenţa medie.

Vineri, 7 Febr. 1936:

1. *Prof. E. Mihai:* Scadenţa medie.
2. *Prof. N. Pauli:* Două metode pentru calcularea volumului unei sfere.
3. *Prof. V. Alaci:* Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni.

Vineri, 13 Martie 1936:

1. *Prof. E. Csilcser:* Asupra unei teoreme de algebră.
2. *Prof. V. Alaci:* Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni.

Marţi, 26 Mai 1936.

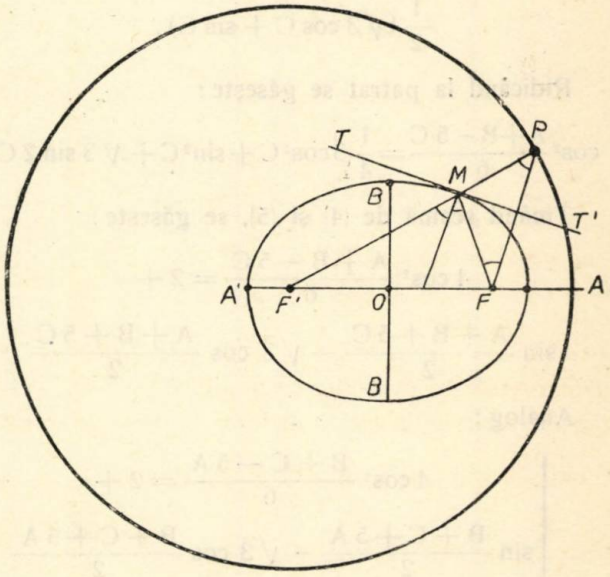
1. *Prof. E. Mihai:* Teoria scontului.
2. *Prof V. Alaci:* Relaţiuni trigonometrice între elementele unui triunghiu, stabilite cu ajutorul calculului vectorial.
3. *Prof. V. Alaci:* Cuvânt de închidere.

PROBLEME REZOLVATE

174. — *Se consideră o elipsă şi un punct* M *mobil pe ea. Se duce din focarul* F *o perpendiculară pe tangenta la elipsă în punctul* M. *Să se afle locul geometric al intersecţiei acestei perpendiculare cu raza vectoare* M F'.

I. COSEREANU

Soluţie geometrică. Fie P punctul al cărui loc se caută. F P fiind perpendiculară pe tangenta în M este paralelă cu normala în M, care se ştie că este bisectoarea interioară a unghiului F M F'.



Rezultă că:

$$M F = M P$$

şi cum:

$$M F + M F' = Const. = 2a,$$

urmează:

$$M F' + M P = F' P = 2a.$$

Locul lui P este deci cercul de rază $2a$ şi de centru F'.

Soluţii date de d nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bobârnac Mircea, Botiş V.* (lic. Arad), *Brăileanu Alexandru* (lic. Constanţa), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Focşăneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Ioniţă M. Ioan* (Şc. Milit., de Artilerie), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lăzărescu F. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Mareş I. Corneliu* (Bacău),

Miclescu Andrei (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popoviciu Tiberiu* (lic Arad), *Schileru C. Dili* (Gorj), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Scripă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Serbănescu I.* (lic. Mihai-Viteazu, Bucureşti), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Ţărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ulmanu Octav*, *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Vătăsan Ovid* (lic. Braşov)

Soluţie analitică. Fie α, β coordonatele punctului M, avem:

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Ecuaţia tangentei în M la elipsă este:

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1.$$

Ecuaţia perpendicularei din $F(c, 0)$ pe tangenta în M este:

$$(2) \qquad y = \frac{a^2 \beta}{b^2 \alpha}(x - c),$$

iar ecuaţia razei vectoare $F'M$ este:

$$(3) \qquad \frac{y}{\beta} = \frac{x + c}{\alpha + c}.$$

Eliminarea lui α, β între ecuaţiile (1), (2) şi (3), ne va da ecuaţia locului punctului P. In adevăr egalând valorile lui $\frac{y}{\beta}$ din (2) şi (3), avem:

$$\frac{a^2(x - c)}{b^2 \alpha} = \frac{x + c}{\alpha + c},$$

sau:

$$a^2(\alpha + c)(x - c) = b^2 \alpha (x + c).$$

De aci deducem:

$$(4) \quad \alpha = \frac{a^2 c(x - c)}{b^2(x + c) - a^2(x - c)} = \frac{a^2 c(x - c)}{(b^2 + a^2)c - (a^2 - b^2)x}$$

$$= \frac{a^2(x - c)}{a^2 + b^2 - cx},$$

fiindcă:

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Inlocuind valoarea aflată pentru α, în (2), avem:

$$y = \frac{a^2 \beta (x - c)(a^2 + b^2 - cx)}{a^2 b^2 (x - c)} = \frac{\beta (a^2 + b^2 - cx)}{b^2},$$

de unde deducem:

$$(5) \qquad \beta = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2 - cx}.$$

Inlocuind în (1) aceste valori a lui α şi β, aflate în (4) şi (5), găsim:

$$\frac{a^2(x - c)}{(a^2 + b^2 - cx)^2} + \frac{b^2 y^2}{(a^2 + b^2 - cx)^2} = 1,$$

sau:

$$a^2(x - c)^2 + b^2 y^2 - (a^2 + b^2 - cx)^2 = 0.$$

De aci deducem:

$$(a^2 - c^2)x^2 + b^2 y^2 +$$

$$2 b^2 c x - a^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2 a^2 b^2 = 0.$$

Simplificând prin b^2, căci $a^2 - c^2 = b^2$, găsim:

$$x^2 + y^2 + 2 c x - a^2 - b^2 - 2 a^2 = 0.$$

Cum $b^2 = a^2 - c^2$, avem încă:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4 a^2.$$

Aceasta este ecuaţia locului punctului P. Punctul P descrie deci un cerc cu centru în $F'(-c, 0)$ şi cu raza $2a$, adică cercul director.

Soluţii date de d-nii: *Berdan C.* (Bărlad), *Beschea G. Nicolae* (lic. Braşov). *Bobârnac Mircea*, *Botiş V.* (lic. Arad), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu I. N. Valeriu* (Şc. de Artilerie), *Ionescu Gh.* (Caransebeş), *Iordache N. Ioan* (student), *Petrulian Nicu* (Ploeşti), *Podariu Alexandru* (lic Piatra-Neamţ), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu-Văleni*, *Propst Jean* (Şc. Polit, Timişoara), *Schileru C Dili*, *Simionov P. Kindin* (lic. Tulcea), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti), *Stănescu D-tru* (Galaţi), *Stoenescu I. Alexandru* (student, Bucureşti), *Ţărăbuţă C. Paul* (lic. Vihai-Viteazul, Bucureşti), *Timotin D-tru* (Oradea-Mare) şi *Topleceanu C. C-tin* (Caranşebes).

Observări. 1°. Analog se poate trata problema, înlocuind elipsa prin iperbolă.

2°. Toţi corespondenţii ce au rezolvat această problemă, propusă în anul al 2-lea, sunt cu studiile de mult termimata, unii fiind ofiţeri, ingineri şi doctori în matematici.

1337. — *Să se găsiască un cub de 5 cifre, format din cifra 1 încadrată de două numere consecutive de câte două cifre.*

G-L GH. BUICLIU

Dacă N^3 este cubul căutat în condiţiile problemei, vom avea una din egalităţile:

$$(1) \quad N^3 = a(b+1)1ab = 10010\,a + 1001\,b + 110 = 11\,m$$

$$(2) \quad N^3 = ab1a(b+1) = 10010\,a + 1001\,b + 101 = 11\,m + 2,$$

în care a şi b sunt numere de o cifră.

N^3 fiind de 5 cifre, urmează că:

$$21 < N < 47. \tag{3}$$

Din (1) se observă că N trebue să fie multiplu de 11, dar singurii multipli de 11 supuşi restricţiilor (3) sunt 22, 33 şi 44, din care numai:

$$44^3 = 85184$$

este soluţie a problemei.

Faţă de divizorul 11, un cub N^3 este de forma (2), numai dacă:

$$N = 11m + 7, \tag{4}$$

ceia ce se poate găsi uşor ridicând la cub pe fiecare din numerele:

$$11 \times m + i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10).$$

Intre numerele (3), sunt de forma (4), numai numerele 29 şi 40, ale căror cuburi nu satisfac enunţul.

Singura soluţie a problemei este deci:

$$44^3 = 85184$$

Foarte bună soluţie pe această cale de la d-l *Cazanacli V. Petre* (Chisinău).

Au găsit soluţia pe alte căi d-nii: *Amărăşteanu F. M.* (lic. Fraţii Buzeşti, Craiova), *Hompola I. T.*, *Lupescu Gh. C.* (Şc. Ofiţeri Bucureşti), *Mihalcea V. V.*, *Popa N.* (lic. Beiuş), *Rosenberg I.* (Roman)

1374. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sqrt{a+b+\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}}+\sqrt{a+b-\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}}=\sqrt{4a-2b-6c}$$

M. AMARASTEANU

Notând cu E primul membru şi ridicându'l la patrat, avem succesiv:

$$E^2 = a+b+\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}+a+b-\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}+$$
$$2\sqrt{[a+b+\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}][a+b-\sqrt{3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)}]},$$

sau:

$$E^2 = 2a+2b+2\sqrt{(a+b)^2-[3c(2a-3c)-3b(b-2a+4c)]}$$
$$= 2a+2b+2\sqrt{a^2+2ab+b^2-6ac+9c^2+3b^2-6ab+12bc}$$
$$= 2a+2b+2\sqrt{a^2+4b^2+9c^2-4ab-6ac+12bc} = 2a+2b+2\sqrt{(a-2b-3c)^2}$$
$$= 2a+2b+2(a-2b-3c) = 4a-2b-6c.$$

De aci rezultă:

$$E = \sqrt{4a-2b-6c},$$

şi astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de d rile: *Popescu N. Maria* (Bucureşti), *Savin Mărioara* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Anastasie Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Andronache Virgil* (lic Milit., Tg-Mureş) *Andrunachievici Vl.* (lic. Chişinău), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Baumgartner I. Iosif*, *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Bejenaru Gh. Victor* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Berinde L. Titus*, *Bucur N. Virgil* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Cioc I.* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu C. Costică* (lic. Milit, Craiova), *Danielescu I. Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic Milit., N. Filipescu), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit, de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica I. Pompeiu* (lic Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisă I. Gh.* (student, Iaşi), *Moisovici Ştefan* (Colegiu Naţional, Craiova), *Munteanu V. Lazăr* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popoviciu I. Gavril* (lic. Carei), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosenberg Israel* (lic. Roman), *Secară M. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit. N. Filipescu), şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

1383. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin px + \cos px = \sin px \cos px$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

Ridicând la patrat ecuaţia dată, avem:

$$1 + 2\sin px \cos px = \sin^2 px \cos^2 px,$$

sau:

$$4 + 4\sin 2px = \sin^2 2px.$$

Această ecuație se mai poate scri:

$$\sin^2 2px - 4\sin 2px - 4 = 0,$$

care rezolvită în raport cu $\sin 2px$, ne dă:

(1) $$\sin 2px = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2(1 \pm \sqrt{2}).$$

Cum:

$$-1 \leq \sin 2px \leq 1,$$

rezultă din (1) singura soluție valabilă:

$$\sin 2px = 2(1 - \sqrt{2}) = -0{,}828\ldots,$$

sau:

$$\sin[k\pi - (-1)^k 2px] = 0{,}828\ldots, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Căutând în tabela de linii trigonometrice naturale, în coloana *sinus*, putem scri:

$$k\pi - (-1)^k 2px = 55^\circ, 54',$$

de unde:

$$x = \frac{k\pi - 55^\circ, 54'}{(-1)^k 2p}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Colegiul Național, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Grumăzescu Mircea* (Șc. of. de Artilerie), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu) și *Negrea A. Mircea* (Brăila).

1397. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 = 50 \\ xy + yz + zx = 11 \\ (x+y+z)(x+y+z+xyz) = 72 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Prima ecuație se mai poate scri:

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + x^2y^2z^2 = 50$$

și ținând seamă de a 2-a ecuație a sistemului, avem:

(1) $$(x+y+z)^2 + x^2y^2z^2 = 72.$$

A 3-a ecuație a sistemului se mai poate scri:

(2) $$(x+y+z)^2 + xyz(x+y+z) = 72.$$

Scăzând ecuația ( ) din (2), obținem:

$$xyz(x+y+z) - x^2y^2z^2 = 0$$

sau:

$$xyz(x+y+z-xyz) = 0,$$

de unde rezultă:

(3) $$xyz = x+y+z, \qquad (4) \quad xyz = 0.$$

In virtutea ecuației (3), ecuația (2) devine:

$$2(x+y+y)^2 = 72,$$

deci:

(5) $$x+y+z = \pm 6.$$

Ținând seamă de ecuația 2-a a sistemului, de ecuațiele (3) și (5), găsim că sistemul dat este echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=-6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=-6 \end{cases}$$

Soluțiile acestor sisteme sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor de gradul al 3-lea:

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0 \text{ și } t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = 0,$$

care descompuse în factori, ne dau respectiv:

$$(t-1)(t-2)(t-3) = 0, \quad (t+1)(t+2)(t+3) = 0.$$

Avem în acest caz, pentru sistemul dat, următoarele sisteme de soluții:

x	± 1	± 1	± 2	± 2	± 3	± 3
y	± 2	± 3	± 1	± 3	± 1	± 2
z	± 3	± 2	± 3	± 1	± 2	± 1

In virtutea ecuației (4), ecuația (2) ne dă:

(6) $$(x+y+z = \pm 6\sqrt{2}.$$

Ținând seamă de ecuațiile (6) a 2-a ecuație a sistemului (2) și ecuația (6), deducem că sistemul dat este încă echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} x+y+z=6\sqrt{2} \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=-6\sqrt{2} \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=0 \end{cases}$$

Soluțiile acestor sisteme sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor:

$$t^3 - 6\sqrt{2}\,t^2 + 11t = 0$$

și

$$t^3 + 6\sqrt{2}\,t^2 + 11t = 0,$$

care se descompun astfel:

$$t(t^2 - 6\sqrt{2}\,t + 11) = 0$$

și

$$t(t^2 + 6\sqrt{2}\,t + 11) = 0.$$

Avem deci pentru sistemul dat, încă următoarele sisteme de soluții:

x	0	0	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$
y	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$	0
z	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$

x	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$
y	$\pm 3\sqrt{2} \mp \sqrt{7}$	0	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$
z	0	$\pm 3\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$	0

Soluţii date de d-ra: *Popescu Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Colegiu Naţional, Craiova), *Anastasie Petrescu-Craioviţa*, *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit, Craiova), *Costescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Dobrin Virgil* (Tg-Mureş), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Maşcaş Gh. Petre* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş) *Millea G. E.* (Sub-Lt), *Moisă I. Gheorghe* (student, Chimie), *Moisovici Ştefan* (Colegiu Naţional, Craiova), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Panait Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Rauch Iosif* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stefănescu D. Nicolaie* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoica N. D-tru* (Tg-Mureş) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

PROBLEME PROPUSE

1489. — Să se găsească un număr de patru cifre, care împărţit cu numărul format de ultimele sale două cifre, să ne dea un patrat perfect.

GH. CONSTANTINESCU

1490. — Se cere să se găsească patratul de şase cifre $a\,b\,c\,d\,e\,f$, pentru care:

$$a + b = c + d = e + f$$

G-L GH. BUICLIU

1491. — In ce sistem de numeraţie este calculat produsul:

$$121 \times 32 = 4312\,?$$

EUGEN VISA

1492. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x(y+z) = a(x+y+z) \\ y(z+x) = b(x+y+z) \\ z(x+y) = c(x+y+z) \end{cases}$$

Se va studia apoi sistemul generalizat:

$$x_i[(\Sigma x_i) - x_i] = a_i \Sigma x_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ION C SCHILERU-DILI

1493. — Dacă se prelungesc în acelaşi sens, laturile unui patrulater, cu lungimi egale cu de n ori latura respectivă, extremităţile acestor prelungiri sunt vârfurile unui alt patrulater, a cărui suprafaţă S' este dată de:

$$S' = (2n^2 + 2n + 1)\,S,$$

S fiind suprafaţa patrulaterului iniţial.

Dacă prelungirilor se fac aşa încât pentru două laturi consecutive, să nu fie de acelaşi sens, patrulaterul obţinut este un paralelogram pentru care avem:

$$S_1 = 2n(n+1)\,S,$$

S_1 fiind suprafaţa paralelogramului obţinut.

CORNELIU GEORGESCU

1494. — Să se stabilească identitatea:

$$\sin 5\alpha - \sin 4\alpha + \sin 2\alpha - \sin\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{1 + 2\cos\alpha}$$

V. ALACI

1495. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^3 x + \sin^3 y}{\cos^3 x + \cos^3 y} = \sqrt{3} \\ 3\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

1496. — Să se stabilească într'un triunghiu relaţiile:

$$a^2\cos 2(B-C) + b^2\cos 2B + c^2\cos 2C + 2bc\cos(B-C) = 2a[b\cos(2B-C) + c\cos(2C-B)]$$

$$a^2\sin 2(B-C) + b^2\sin 2B - c^2\sin 2C + 2bc\sin(B-C) = 2a[b\sin(2B-C) - c\sin(2C-B)]$$

N. N. MIHAILEANU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Apostol R. (1405, 1408, 1413, 1424, 1427, 1431, 1456, 1470, 1475, 1488), *Berinde L. Titus* (1397, 1404, 1411, 1426, 1431, 1439, 1470), *Cazanacli V. Petre* (1433, 1434, 1435, 1439, 1440, 1441, 1442, 1447, 1448), *Chirvai L. Vasile* (1368, 1381, 1397, 1404, 1420), *Cioc I. Dumitru* (1467, 1484), *Comloşan Cornelia* (1475, 1476), *Constantinescu G.* (A, N, P), *Constantinescu G. Gh.* (A, N), *Florescu Victor* (1393, 1435, 1447, 1448, 1467, 1468, 1470, 1475, 1476, 1488), *Gloden A.* (N, 1432, 1456, 1462), *Matei D. D-tru* (1389, 1425, 1448, 1451, 1453, 1455, 1456), *Marica Pompeiu* (P, 1397, 1400, 1403, 1417, 1424, 1431, 1439, 1449, 1452, 1453), *Mişca V.* (1372, 1405, 1420, 1437, 1451, 1466), *Negulescu D. Ştefan* (1416, 1476, 1488), *Pădureţ A. V.* (N, 1484, 1487), *Postelnicescu C. M.* (N, P, 1195, 1220, 1371, 1379, 1432, 1439, 1447, 1448, 1456, 1463), *Rada D-tru* (1471, 1484, 1488), *Rădulescu Octavian* (1468, 1469, 1470, 1484), *Ripian A.* (1483, 1484, 1485, 1486, 1488), *Rosenberg I.* (1389, 1440, 1469, 1470), *Sternberg H* (1487), *Ştefănescu D. Nicolae* (1467, 1470, 1471), *Thébault V.* (N), *Vişa Eugen* (P).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 IULIE 1936 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CAIUS IACOB: GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI FOURET.
2. NOTE MATEMATICE: 9, 10.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 99, 639 657, 1267, 1392, 1399, 1400, 1401, 1404, 1408, 1410.
5. PROBLEME PROPUSE: 1497-1504.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat poştal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — No. 5 TIMISOARA, 15 IULIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI FOURET

DE CAIUS IACOB

Se datoreşte lui *Fouret*[1] teorema următoare: dacă un sistem oarecare de puncte materiale, deformabil sau nu, se deplasează, suma produselor obţinute înmulţind massa fiecărui punct al sistemului prin pătratul deplasării sale, este egală cu produsul massei totale a sistemului prin patratul proiecţiei deplasării centrului de greutate pe o direcţie arbitrară, plus suma produselor obţinute înmulţind massele punctelor prin patratul deplasărilor ce l-ar trebui imprimate, pentru a le aduce în poziţiile lor finale, după ce le-am supus la o translaţie comună în direcţia aleasă şi egală cu proiecţia pe această direcţie a deplasării centrului de greutate.

Această teoremă conţine ca un caz particular teoremele bine cunoscute ale lui *Koenig* şi *Ossian-Bonnet* asupra energiei unui sistem de puncte materiale.

In cele ce urmează, ne propunem să generalizăm teorema lui *Fouret*. Fie $S^{(1)}$, S şi $S^{(2)}$ trei poziţii succesive ale unui sistem de puncte materiale, $A_i^{(1)}$, A_i şi $A_i^{(2)}$, $(i=1,2,\ldots,n)$, poziţiile respective ale unui punct al sistemului, G_1, G şi G_2 centrele de greutate corespunzătoare. Să considerăm două axe arbitrare Ox' şi Ox''; vom nota cu G_1' proiecţia ortogonală a lui G_1 pe Gx' şi cu G_2'' proiecţia lui G_2 pe Gx'', Gx' şi Gx'' fiind axe paralele cu primele şi trecând prin punctul G.

Teoremă. Suma produselor masselor m_i ale punctelor sistemului S prin produsele scalare ale deplasărilor $\overline{A_iA_i^{(1)}}$ şi $\overline{A_iA_i^{(2)}}$ este egală cu massa totală a sistemului înmulţită cu produsul scalar al proiecţiilor $\overline{GG_1'}$ şi $\overline{GG_2''}$, pe axele arbitrare Ox' şi Ox'', ale deplasărilor $\overline{GG_1}$ şi $\overline{GG_2}$ ale centrului de greutate, plus massa totală înmulţită cu suma de produse scalare $\overline{GG_1'}\cdot\overline{G_2''G_2}+\overline{GG_2''}\cdot\overline{G_1'G_1}$, plus suma produselor masselor punctelor A_i prin produsul scalar al deplasărilor $\overline{A_i'A_i^{(1)}}$ şi $\overline{A_i''A_i^{(2)}}$ ce le-ar trebui imprimate pentru a le aduce în poziţiile lor din $S^{(1)}$ şi $S^{(2)}$ după ce le-am supus respectiv la o translaţie egală cu $\overline{GG_1'}$, $\overline{GG_2''}$.

Să arătăm cu alte cuvinte că avem formula:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overline{A_iA_i^{(1)}}\cdot\overline{A_iA_i^{(2)}} = M\,\overline{GG_1'}\cdot\overline{GG_2''}+$$

$$M\,\overline{GG_1'}\cdot\overline{G_2''G_2}+M\,\overline{GG_2''}\cdot\overline{G_1'G_1}+ \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overline{A_i'A_i^{(1)}}\cdot\overline{A_i''A_i^{(2)}}$$

unde am pus $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$. Pentru aceasta, să plecăm dela relaţiile:

$$\overline{A_iA_i^{(1)}}=\overline{A_iA_i'}+\overline{A_i'A_i^{(1)}}$$
$$\overline{A_iA_i^{(2)}}=\overline{A_iA_i''}+\overline{A_i''A_i^{(2)}}, \tag{2}$$

şi să observăm că vectorii $\overline{A_iA_i'}$, $\overline{A_iA_i''}$ sunt respectiv echipolenţi cu $\overline{GG_1'}$, $\overline{GG_2''}$.

In virtutea proprietăţii de distributivitate a produsului scalar faţă de adunarea geometrică, avem, ţinând seamă de (2):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overline{A_iA_i^{(1)}}\cdot\overline{A_iA_i^{(2)}}=$$

[1]) *Fouret*, Sur une généralisation du théorème de *Koenig*, (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIV, p. 142).

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i'} \cdot \overline{A_i A_i''} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i' A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i A_i''}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i'} \cdot \overline{A_i'' A_i^{(2)}} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i' A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i'' A_i^{(2)}}$$

Deoarece $\overline{A_i A_i'} \cdot \overline{A_i A_i''} = \overline{G G_1'} \cdot \overline{G G_2''}$, primul termen din membrul al 2-a este egal cu $M \overline{G G_1'} \cdot \overline{G G_2''}$; rămâne să calculăm valoarea termenului al doilea şi al treilea.

Avem:

$$(2') \quad \overline{A_i' A_i^{(1)}} = \overline{A_i A_i^{(1)}} - \overline{G G_1'} = \overline{G_1' A_i^{(1)}} - \overline{G A_i}$$

şi la fel:

$$(2'') \quad \overline{A_i'' A_i^{(2)}} = \overline{A_i A_i^{(2)}} - \overline{G G_2''} = \overline{G_2'' A_i^{(2)}} - \overline{G A_i}.$$

Vom putea deci scrie, ţinând seamă de (2') şi (3').

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i' A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i A_i''} = \overline{G G_2''} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{G_1' A_i^{(1)}} - \overline{G A_i} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i'} \cdot \overline{A_i'' A_i^{(2)}} = \overline{G G_1'} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{G_2'' A_i^{(2)}} - \overline{G A_i} \right)$$

Insă avem relaţiile:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{G A_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{G_1 A_i^{(1)}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{G_2 A_i^{(2)}} = 0,$$

de unde:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i' A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i A_i''} = \overline{G G_2''} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{G_1' G_1} + \overline{G_1 A_i^{(1)}} \right)$$

$$= M \overline{G G_2''} \cdot \overline{G_1' G_1}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i'} \cdot \overline{A_i'' A_i^{(2)}} = \overline{G G_1'} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{G_2'' G_2} + \overline{G_2 A_i^{(2)}} \right)$$

$$= M \overline{G G_1'} \cdot \overline{G_2'' G_2}.$$

Teorema este astfel stabilită.

Cazuri particulare. Vom semnala următoarele două cazuri.

1°. *Axele* $O x'$, $O x''$ *coincid.*[2] In acest caz avem relaţia mai simplă:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i A_i^{(2)}} = M \overline{G G_1'} \cdot \overline{G G_2''}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_1' A_i^{(1)}} \cdot \overline{A_i'' A_i^{(2)}},$$

căci:

$$\overline{G G_1'} \cdot \overline{G_2'' G_2} = 0, \qquad \overline{G G_2''} \cdot \overline{G_1' G_1} = 0.$$

Să presupunem în plus că poziţia $S^{(2)}$ a sistemului coincide cu poziţia $S^{(1)}$; în acest caz obţinem formula:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i^{(1)}}^2 = M \overline{G G_1'}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i' A_i^{(1)}}^2,$$

care nu exprimă altceva decât teorema lui *Fouret*.

La fel avem:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i A_i^{(2)}}^2 = M \overline{G G_2''}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_i'' A_i^{(2)}}^2.$$

Formulele acestea ne permit să găsim o proprietate interesantă a energiei de acceleraţie a unui sistem mobil. Să presupunem că $S^{(1)}$, S şi $S^{(2)}$ sunt poziţiile sistemului material considerat la momentele $t - \Delta t$, t şi $t + \Delta t$. Inmulţind relaţia (3) cu 2, adunând membru cu membru cu relaţiile (4) şi (5) şi împărţind cu Δt^4, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\overline{A_i A_i^{(1)}} + \overline{A_i A_i^{(2)}}}{\Delta t^2} \right)^2 = M \left(\frac{\overline{G G_1'} + \overline{G G_2''}}{\Delta t^2} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\overline{A_i' A_i^{(1)}} + \overline{A_i'' A_i^{(2)}}}{\Delta t^2} \right)^2.$$

Insă se ştie[3] că limita expresiei:

$$\left(\frac{\overline{A_i A_i^{(1)}} + \overline{A_i A_i^{(2)}}}{\Delta t^2} \right)^2,$$

când Δt tinde către zero, este chiar patratul acceleraţiei $\overline{\ddot{A}_i}$ punctului A_i.

Se ajunge astfel la următoarea formulă, dând expresia energiei de acceleraţie a sistemului:

[2]) Cazul acesta particular l-am expus la o şedinţă a seminarului de Mecanică din Bucureşti, de sub direcţia D-lui Prof. *V. Vâlcovici*, încă în 1931.

[3]) A se vedea: *D. Pompeiu*, Le vecteur accéleration (Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences, t. 31, 1928).

(6) $$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\ddot{A}_i^2} = M \cdot \overline{\ddot{G}_{Ox'}^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\ddot{A}_{iOx'}^{(r)2}},$$

$\overline{\ddot{A}_{iOx'}^{(r)}}$ fiind, cum se constată uşor, acceleraţia relativă a punctului A_i în mişcarea sa faţă de un reper animat de o translaţie de viteză $\overline{\dot{G}_{Ox'}}$, însemnând cu $\overline{\dot{G}_{Ox'}}$ proiecţia vitezei $\overline{\dot{G}}$ a centrului de greutate pe axa Ox'; $\overline{\ddot{G}_{Ox'}}$ este proiecţia pe Ox' a acceleraţiei centrului de greutate. Relaţia (6) generalizează o formulă analoagă corespunzătoare energiei cinetice.

2°. Să presupunem acum că axele Ox' şi Ox'' sunt paralele respectiv cu $\overline{GG_1}$ şi $\overline{GG_2}$. In acest caz $\overline{G_1'G_1} = 0$, $\overline{G_2''G_2} = 0$ şi relaţia (1) are iarăşi o formă mai simplă. Procedând ca mai sus, şi trecând la limită, se obţine uşor formula:

(7) $$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\ddot{A}_i^2} = M \overline{\ddot{G}^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\ddot{A}_i^{(r)2}},$$

care nu exprimă altceva decât teorema lui *Koenig* pentru energia de acceleraţie a sistemului[4]; în această relaţie, $\overline{\ddot{A}_i^{(r)}}$ reprezintă acceleraţia relativă a punctului A_i în mişcarea sa în jurul centrului de greutate.

NOTE MATEMATICE

9. — *Remarques sur des carrés curieux.*

1. Lorsque dans un système de numération de base B, où a, b, c sont des chiffres représentant des nombres plus petits que B, le nombre de quatre chiffres:

$$N = a\,a\,b\,b = (c\,c)^2,$$

on a:

(1) $$N = a\,a\,b\,b = (B+1)\,.\,(a\,B^2 + b) = (c\,c)^2 = c^2\,(B+1)^2.$$

Le facteur $B+1$ ne pouvant être nul:

(2) $$a\,B^2 + b = c^2\,(B+1).$$

Comme:

(3) $$a\,B^2 + b = a\,(B^2 - 1) + a + b = a\,(B-1)\,(B+1) + a + b,$$

il en résulte que:

(4) $$a\,(B-1)\,(B+1) + a + b = c^2\,(B+1).$$

Dès lors, $B+1$ doit diviser $a+b$ et, puisque $a < B$, $b < B$:

(5) $a + b = B + 1$, $(a > 1,\ b > 1)$, et $B = a + b - 1$,

d'où il s'ensuit que:

(6) $$N = (B+1)^2\,.\,(B^2 - b\,B + b) = (B+1)^2\,.\,(a\,B - a + 1)$$

En outre, en vertu de (2) et (5):

(7) $$c^2 = a\,(B-1) + 1 = B^2 - b\,(B-1) < B^2,$$

et enfin:

(8) $$c^2 = (a-1)^2 + a\,b.$$

Comme $a \leqq B - 1$, la relation (7) prouve que $c > a$.

2. Si l'on suppose que a et c sont des entiers concécutifs, on doit avoir $c = a + 1$, et:

$$(a-1)^2 + a\,b = c^2 = (a+1)^2;$$

d'où $b = 4$.

S'il existe des nombres:

$$N = a\,a\,b\,b = (c\,c)^2,$$

carrés parfaits, où a et c sont consécutifs, ces nombres sont donc de la forme:

$$N = a\,a\,4\,4 = (c\,c)^2.$$

De plus:

$$a + b = B + 1 = 11, \quad a = B - 3,$$

$$N = (B+1)^2\,.\,(B^2 - 4\,B + 4) = (B+1)^2\,.\,(B-2)^2.$$

Par suite, *on a pour toute valeur de* B *plus grande que* 4*:*

$$N = (B+1)^2\,.\,(B-2)^2 = \overline{B-3}\,\overline{B-3}\,44\ ^{1)}$$

et la racine carrée de N *est le nombre:*

$$n = (B-2)\,B + (B-2) = \overline{B-2}\,\overline{B-2}$$

formé de deux chiffres égaux l'un et l'autre à $\overline{B-2}$.

On en conclut que *dans tout système de numération de base* $B > 4$, *il y a un seul carré parfait de quatre chiffres de la forme:*

---

[4]) A se vedea *P. Appel*, Traité de Mécanique rationnelle, t. 2, ediţia 4-a, p. 389.

[1]) $B-3$, $B-3$, 4, 4 sont les quatre chiffres de N.

$$N = a\,a\,b\,b = (c\,c)^2,$$

où a et c sont des entiers consécutifs.

Exemples. B = 5. $N = 2244 = (33)^2$

B = 10. $N = 7744 = (88)^2$

B = 12, $N = 9944 = (\overline{10}\,\overline{10})^2, \ldots$

Remarques. 1°. Si $a = b$, on a B = 7, et:

$$N = 4444 = (55)^2.$$

2°. Nous avons donné d'autres curiosités des carrés de la forme:

$$N = a\,a\,b\,b = (c\,c)^2.$$ [2])

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

10. — *Sur les règles de divisibilité par 9 et par 11, dans le système de numération décimal.*

1°. Il y a une règle pour écrire les nombres de telle façon que la règle de divisibilité par 9 s'énonce comme celle par 11 et vice versa.

Soit N un nombre quelconque que nous mettons sous la forme:

$$N = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dans cette égalité x prend toujours la valeur -10, et nous supposons que les coefficients $a_m, a_{m-1}, \ldots a_1\ a_0$ sont supérieurs (ou égaux) à 0, mais inférieurs à 10.

Nous représentons N par le symbole $\overline{a_m\,a_{m-1}\,\ldots a_1\,a_0}$.

Dans ces conditions, la divisibilité de N s'exprime ainsi:

par 9: $a_0 + a_2 + \cdots - (a_1 + a_3 + \cdots) = \text{M. } 9.$

par 11: $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \text{M. } 11.$

Exemples: $N = 98_{10} = \overline{118}$

$567_{10} = \overline{647}$

$979_{10} = \overline{19039}.$

Divisibilité par 9.

$8 + 1 - 1 = 8$; reste = 8

$7 + 6 - 4 = 9$; divisible.

$9 + 0 + 1 - (3 + 9) = -2$; reste = 7

Divisibilité par 11.

$8 + 1 + 1 = 10$; reste = 10

$7 + 4 + 6 = 17$; reste = 6

$9 + 3 + 0 + 9 + 1 = 22$; divisible.

2°. *Généralisation. Sur les règles de divizibilité par $a - 1$ et $a + 1$ dans un système de base a.*

Si l'on suppose que a désigne la base d'un système de numération quelconque, et, si dans l'égalité:

$$N = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

on fait $x = -a$, *la règle de divisibilité pour $a - 1$ dans ce système de numération s'énonce comme celle pour $a + 1$ dans le même système, et inversement.*

Considérons par exemples deux nombres écrits dans le système duodécimal:

$$66_{10} = 56_{12} = \overline{176_{12}}$$

$$91_{10} = 77_{12} = \overline{157_{12}}.$$

Divisibilité par 11.

$6 + 1 - 7 = 0$; divisible

$7 + 1 - 5 = 3$; reste = 3

Divisibilité par 13.

$6 + 7 + 1 = 14$; reste = 1

$7 + 5 + 1 = 13$; divisible.

A. GLODEN

[2]) *Sphinx*, 1935—99, *Mathesis*, 1933-388, 1935—168, et *Supplément*, (mars 1936).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 10, Iunie 1936. Cuvântarea rostită la dezvelirea bustului Ing. *I. D. Teodor*, de *G. Borneanu*. André-Marie Ampère (1775—1836), de *Ion Ionescu*. Tabla Tibetului, de *Victor Marian*. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol (urmare), de *D. Barbilian*. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului *V. Cristescu*, de Colonel *Liteanu* şi Ing. *A. Ioanovici*. Note matematice, bibliografie, Cereri, Diverse, Probleme rezolvate şi propuse.

2: *Ştiinţă şi Progres*. Revista Stiinţifică a Liceelor Militare, N-rile 3, 4, Iunie 1936. Intrunirea primei promoţii complete a liceului Militar „*Mihai Viteazul*", de Prof. *B. Cocoş*. Rezultatul concursului „*Gazetei Matematice*". Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de *V. Alaci*. Elementele teoriei gazelor electronice, de *Teofil T. Vescan*. Braşovul şi valea Prahovei, de *Chiriţă Gheorghe*. Noutăţi, Publicaţii noi, Probleme rezolvate şi propuse.

3. *P. Sergesco*. Sur quelques aspects des Mathématiques contemporaines. (III-e Congrés international D'Histoire de Sciences, Lisboa 1935.

4. *P. Sergesco.* Les Mathématiques dans le Journal des Savants. (Reprinted from Osiris, Vol. I, 1936).

5. *Gh. Gh. Vasiliu.* Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer Koordinaten. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique, de L'École Polytechnique *„Roi Carol II"*, Bucarest, Fasc. 16, 1936).

PROBLEME REZOLVATE

99. — *Sub clopotul unei mașini pneumatice se așează un corp și un mic indicator de vid. Volumul corpului de pompă este de 4 litri; volumul interior al clopotului (minus volumul indicatorului) este de 2 litri. După două lovituri de piston, indicatorul arată o presiune de 19 cm. mercur. Presiunea inițială sub clopot fiind 76 cm., să se găsiască volumul corpului.*

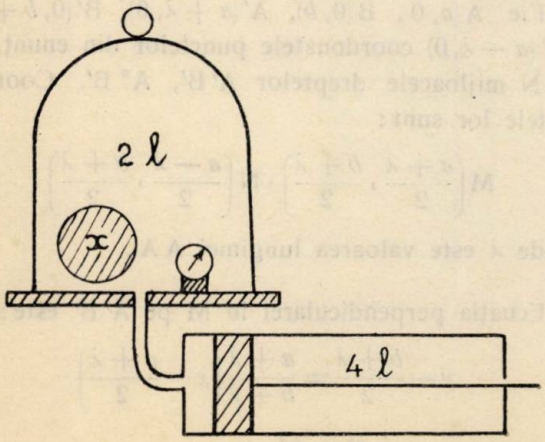
C. STANCESCU

Fie x volumul în litri al corpului din clopotul mașinei pneumatice, v_1 volumul interior al corpului (minus volumul indicatorului), v_2 același volum plus volumul corpului de pompă în litri, p' presiunea după prima cursă a pistonului și p'' presiunea după a doua cursă.

Problema se rezolvă făcând uz de legea lui *Boyle-Mariotte* exprimată prin formula:

$$p \times v = c^t, \tag{1}$$

unde p și v sunt presiunea și volumul gazului închis.



Inițial avem:

$$p = 760 \text{ mm} = 7{,}6 \text{ dm}$$

$$v = v_1 - x \text{ litri},$$

deci după (1):

$$7{,}6 \times (v_1 - x) = k, \tag{2}$$

unde k e o constantă. La finele primei curse a pistonului, presiunea necunoscută, este p', iar volumul aerului $v_2 - x$, deci:

$$p'(v_2 - x) = k. \tag{3}$$

Din (2) și (3) se scoate:

$$7{,}6 \times (v_1 - x) = p'(v_2 - x).$$

La începutul și la finele cursei a doua a pistonului vom avea:

$$p'(v_1 - x) = p''(v_2 - x). \tag{4}$$

Inmulțind (3) cu (4), obținem ecuația:

$$7{,}6(v_1 - x)^2 = p''(v_2 - x)^2, \tag{5}$$

care dă volumul x al corpului de sub clopot, în cazul când se cunosc v_1, v_2 și p''.

Pentru cazul numeric din enunț avem:

$$7{,}6(2 - x)^2 = 1{,}9(6 - x)^2$$

$$57x^2 - 76x - 380 = 0,$$

ale cărei rădăcini:

$$x_1 = \frac{190}{57} > 2 \quad \text{și} \quad x_2 = -2,$$

ambele inadmisibile din punct de vedere practic.

Deci datele numerice ale problemei nu sunt bine alese.

Pentru aplicațiune numerică, trebuie alese valorile lui v_1, v_2, p'' așa în cât cel puțin una din rădăcinele ecuației (5) să fie mai mică de cât v_1 și mai mare de cât zero, ceiace formează obiectul problemei, propusă în acest număr.

639. — *In orice triunghiu avem:*

$$\alpha^2(b + c) + \beta^2(c + a) + \gamma^2(a + b) = 12\,sr,$$

unde α, β, γ sunt laturile triunghiului având vârfurile în punctele de contact al cercului înscris.

GHEORGHE TH GHEORGHIU

Insemnând cu E primul membru al relației din enunț și având în vedere relațiile cunoscute într'un triunghiu, anume:

$$a = 2r\cos\frac{A}{2}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$a+b+c = 2p, \qquad s = pr,$$

(Compléments de Trigonométrie, pag. 204), putem scri succesiv:

$$E = \sum a^2(b+c) = 4r^2\sum(b+c)\cos^2\frac{A}{2} =$$

$$4r^2\sum(b+c)\frac{p(p-a)}{bc}$$

$$= 4r^2\left[\frac{p}{c}(p-a)+\frac{p}{b}(p-a)+\frac{p}{a}(p-b)+\right.$$

$$\left.\frac{p}{c}(p-b)+\frac{p}{b}(p-c)+\frac{p}{a}(p-c)\right]$$

$$= 4r^2\left[\frac{p}{c}(p-a+p-b)+\frac{p}{a}(p-b+p-c)+\right.$$

$$\left.\frac{p}{b}(p-c+p-a)\right]$$

$$= 4r^2\left[\frac{p}{c}(2p-a-b)+\frac{p}{a}(2p-b-c)+\right.$$

$$\left.\frac{p}{b}(2p-c-a)\right]$$

$$= 4r^2\left(\frac{p}{c}\ c+\frac{p}{a}\cdot a+\frac{p}{b}\cdot\right) =$$

$$12pr^2 = 12pr.r = 12sr.$$

Relaţia din enunţ este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Bucurescu I.* (lic. Odorheiu), *Cosniţă Cezar* (lic. Bărlad), *Craiu N. Ion* (lic. Piteşti), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student, Leoben).

657. — *Să se afle câtul expresiunei:*

$$xy(2x^3+2xy^2+xy)-(x^2+y^2)^2+x^6-y^6+2y^5,$$

prin fiecare din polinoamele:

$$P_1 = x+y-1 \quad \text{şi} \quad P_2 = x^2+xy+y^2.$$

CEZAR COSNITA

Dacă însemnăm cu E expresiunea dată, dezvoltăm calculele, descompunând apoi în factori, avem succesiv:

$$E = 2x^4y+2x^3y^3+x^2y^2-x^4-2x^2y^2-y^4+$$

$$x^6-y^6+2x^5 = (x^6-y^6)+2y(x^4+x^2y^2+y^4)-$$

$$(x^4+x^2y^2+y^4) = (x^6-y^6)+(x^4+x^2y^2+y^4)(2y-1) =$$

$$(x^3-y^3)(x^4+x^2y^2+y^4)+(x^4+x^2y^2+y^4)(2y-1) =$$

$$(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2+2y-1) =$$

$$(x^4+x^2y^2+y^4)[x^2-(y^2-2y+1)] =$$

$$[(x^2+y^2)^2-x^2y^2][x^2-(y-1)^2] =$$

$$(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)(x+y-1)(x-y+1).$$

Acum se observă uşor câtul între expresia dată şi polinoamele P_1 şi P_2. Aceste câturi sunt respectiv:

$$E:P_1 = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)(x-y+1) =$$

$$(x^4+x^2y^2+y^4)(x-y+1)$$

$$E:P_2 = (x^2+y^2+xy)(x+y-1)(x-y+1) =$$

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-y^2+2y-1).$$

Soluţii date de d-nii: *Balaban I. Gh.* (lic. Codreanu, Bărlad) şi *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti)

1267[1]. — *Fie* AOB *un triunghiu dreptunghic în* O. *Pe catetele* OA, OB *şi în acelaşi senz, se iau lungimele* AA′, BB′ *egale între ele şi variabile. Fie* A″ *simetricul lui* A′ *faţă de* A. *Se ştie că perpendiculara pe* A′B′ *în mijlocul său trece printr'un punct fix* F. *Să se arate că şi perpendiculara pe mijlocul lui* A″B′ *trece printr'un punct fix* F′; *mijlocul lui* FF′ *fiind de asemenea fix, să i-se calculeze distanţa la* O.

G-L GH. BUICLIU

Fie $A(a,0)$, $B(0,b)$, $A'(a+\lambda,0)$, $B'(0,b+\lambda)$, $A''(a-\lambda,0)$ coordonatele punctelor din enunţ, M şi N mijloacele dreptelor A′B′, A″B′. Coordonatele lor sunt:

$$M\left(\frac{a+\lambda}{2},\frac{b+\lambda}{2}\right), N\left(\frac{a-\lambda}{2},\frac{b+\lambda}{2}\right),$$

unde λ este valoarea lungimei AA′.

Ecuaţia perpendicularei în M pe A′B′ este:

$$y-\frac{b+\lambda}{2} = \frac{a+\lambda}{b+\lambda}\left(x-\frac{a+\lambda}{2}\right)$$

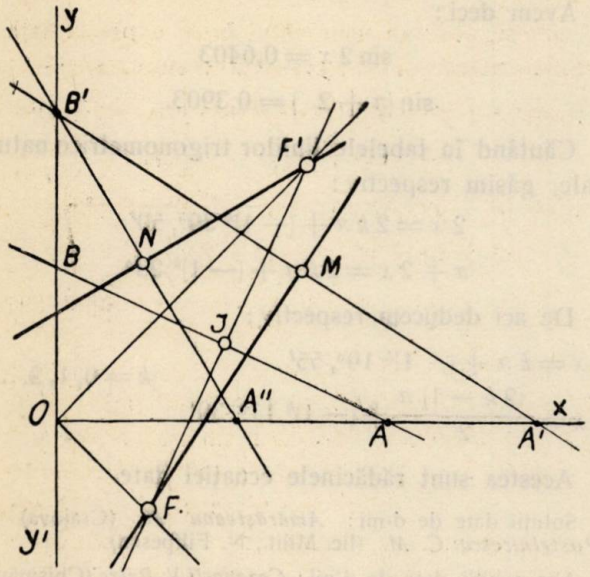
$$\text{sau} \quad by-ax+\frac{a^2-b^2}{2}+\lambda(y-x-b+a) = 0$$

[1]) A se vedea enunţul de la pag. 141, vol. XIII şi complectarea de la pag. 12, vol. XIV.

Sub această formă, se vede că perpendiculara în M pe $A'B'$, trece prin punctul F de intersecție al dreptelor:

(1) $$by - ax + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0$$

(2) $$y - x - b + a = 0.$$



Rezolvind sistemul (1), (2), găsim:

$$F\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right),$$

care arată că F este un punct fix pe bisectoarea unghiului $x\,O\,y'$.

La fel se găsește că ecuația perpendicularei în N pe $A''B'$ este dreapta:

$$by - ax - \frac{b^2 - a^2}{2} + \lambda(y + x - a - b) = 0,$$

care trece prin intersecția dreptelor:

(3) $$by - ax - \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$$

(4) $$y + x - a - b = 0.$$

Din (3) și (4) se scoate:

$$F'\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right),$$

care arată că F' este fix pe bisectoara unghiului $x\,O\,y$.

Mijlocul J al lui $F\,F'$ are coordonatele $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, deci se confundă cu mijlocul lui $A\,B$ și atunci:

$$\overline{0\,J} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Au dat această soluție d-nii: *Mihalcea I. O.* (Buzău) și *Negrea A. M. Leonte* (Brăila).

D-l *P. Cazanacli* (Iași) a rezolvat foarte bine problema fără a calcula pe O J, cum se cere în complectarea de la pag. 12, Vol. XIV.

Observări. Dacă se elimină λ între ecuațiile dreptelor $M\,F$, $N\,F'$ să găsește proprietatea interesantă, că aceste drepte se întâlnesc pe perpendiculara în A la $O\,x$ în centrul cercului $A'\,B'\,A''$.

De oarece $F\,F'$, $A\,B$ sunt perpendiculare în mijlocul lor, figura $A\,F'\,B\,F$ este un romb.

Aceste proprietăți și cea din enunț se pot demonstra direct pe cale geometrică.

1392. — A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, să se stabilească relația:*

$$\sum \frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} - 2\,\Pi \frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} = 1.$$

V. ALACI

Insemnăm cu E primul membru și observând că:

$$\frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} \frac{A}{2}},$$

urmează că putem scri succesiv:

(1) $$E = \sum \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} \frac{A}{2}} - 2\,\Pi \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} \frac{A}{2}} =$$

$$\frac{\sum \left(1 + \operatorname{cotg} \frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right) - 2}{\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right)} =$$

$$\frac{3 + 2 \sum \operatorname{cot} \frac{A}{2} + \sum \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} - 2}{1 + \sum \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \sum \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}} =$$

$$\frac{1+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{1+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}$$

Dar cum este cunoscut că într'un triunghiu oarecare, avem:

$$\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

rezultă că relaţia (1) se mai poate scri:

$$E=\frac{1+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cot}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{1+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\Sigma\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cot}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=1,$$

şi astfel relaţia cerută este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Savin Mărioara* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Colegiu Naţional, Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit de Artilerie), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Neguiescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara) *Stefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu).

1399. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}+\frac{\operatorname{cosec} x+\sec x}{\operatorname{cosec} x}+$$

$$\frac{\operatorname{cosec} x+\sec x}{\sec x}+\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x}=20$$

LT C V. COSTACHESCU

Ecuaţia dată se mai poate scri:

$$1+\operatorname{cotg} x+\operatorname{tg} x+1+1+\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x+$$

$$1+1+\operatorname{cotg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x+1=20$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x+2(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)=14.$$

Mai putem scri încă:

$$(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)^2+2(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)=16,$$

sau:

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{2}{\sin x\cos x}=16,$$

fiindcă: $\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

Această ecuaţie se mai poate scri:

$$16\sin^2 x\cos^2 x-2\sin x\cos x-1=0,$$

sau încă:

$$4\sin^2 2x-\sin 2x-1=0.$$

Rezolvind această ecuaţie de gradul al 2-lea în $\sin 2x$, obţinem:

$$\sin 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}=\frac{1\pm 4{,}1231}{8}.$$

Avem deci:

$$\sin 2x=0{,}6403$$

$$\sin(\pi+2\ )=0{,}3903.$$

Căutând în tabelele liniilor trigonometrice naturale, găsim respectiv:

$$2x=2k\pi+(-1)^k\,39^0,50'$$

$$\pi+2x=2k\pi+(-1)^k\,23^0.$$

De aci deducem respectiv:

$$\begin{cases} x=k\pi+(-1)^k\,19^0,55' \\ x=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}+(-1)^k\,11^0,30' \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

Acestea sunt rădăcinele ecuaţiei date.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu M.* (Craiova) şi *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu).

Alte soluţii date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău)' *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Millea G. E.* (Sub-Lt) şi *Negrea A. Mircea* (Brăila).

1400. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, să se stabilească relaţia:*

$$p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=$$

$$4R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

VASILE GHIOCEL

Insemnăm cu E_1 şi E_2 respectiv, cei doi membrii a-i relaţiei din enunţ.

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute într'un triunghiu oarecare, anume:

$$p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=r_a,\qquad p\operatorname{tg}\frac{B}{2}=r_b,\qquad p\operatorname{tg}\frac{C}{2}=r_c,$$

avem:

$$(1)\qquad E_1=r_a+r_b+r_c+3\frac{r_a r_b r_c}{p^2}.$$

Dar sunt încă cunoscute şi relaţiile:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r,\qquad r_a r_b r_c=p^2 r,$$

astfel că relaţia (1) devine:

$$(2) \qquad E_1 = 4R + r + 3r = 4(R + r).$$

De altă parte, în virtutea relaţiei cunoscute într'un triunghiu, anume:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

(Culegere de Probleme de Trigonometrie, pag. 394, exemplu 2), precum şi încă a relaţiilor:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = s^2, \quad \frac{s}{p} = r, \quad abc = 4Rs,$$

membru al 2-lea al relaţiei cerute a fi stabilită, se poate scri succesiv:

$$(3) \qquad E_2 = 4R\left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) =$$

$$4R\left[1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right] = 4R\left(1 + 4\,\frac{\frac{s^2}{p}}{4Rs}\right)$$

$$= 4R\left(1 + \frac{s}{p} \cdot \frac{1}{R}\right) = 4(R + r).$$

Comparând relaţiile (2) şi (3), deducem imediat:

$$E_1 = E_2,$$

astfel că relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Colegiu Naţional, Craiova), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I Simion* (lic. Huşi), *Cioc I.* (lic. Milit., Craiova), *Cotescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Moisă I. Gheorghe* (student Chimie, Iaşi), *Negrea A. Mircea* (Brăila) *Negulescu Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

1401. — *Să se găsească un număr de două cifre astfel ca jumătatea lui să fie egală cu rădăcina patrată a răsturnatului său.*

CEZAR IVANESCU

Soluţie aritmetică. Patratele perfecte de două cifre sunt:

16, 25, 36, 49, 64 şi 81.

Dintre acestea păstrăm numai pe acelea care răsturnate se divid prin 2, adică:

25, 49, 64, 81.

Jumătăţile acestor numere răsturnate, sunt:

26, 47, 23, 9.

Singurul număr care satisface enunţul este evident 18.

Soluţii date de d ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Anastasie Petrescu-Craiovita*, *Beju I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Bejenaru Gh. Victor* (lic Milit., Tg-Mureş), *Berinde Titus* (lic. Lugoj), *Bobovodea Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Bucur N. Virgiliu* (lic. Milit, Iaşi), *Chiriac I Simion* (lic. Huşi), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dalban Gh.* (lic Milit., Tg-Mureş) *Dulămiţă Gr. Tutu* (lic Milit, Craiova), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit, de Artilerie), *Grabovschi F. Eugen*, *Ionescu D.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Maşcaş Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei Dimitrie* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş) *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău). *Moisă I. Gheorghe* (student Chimie, Iaşi), *Munteanu V. Lazăr* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Nicolescu C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Rădulescu Gh. Octav* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosenberg I.* (lic. Roman), *Secară D-tru* lic. Internat, Iaşi), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu D. N.* (lic. Milit. N. Filipescu), *Stoica N. D-tru* (Tg-Mureş) şi *Ţiţeica I. Ion* (lic. Milit., N. Filipescu).

Soluţie algebrică. Fie x şi y cifrele numărului de două cifre cerut.

Conform enunţului avem:

$$\frac{10x + y}{2} = \sqrt{10y + x},$$

sau:

$$(10x + y)^2 = 4(10y + x).$$

Dezvoltând şi ordonând în raport cu y, obţinem:

$$y^2 - 20(2 - x)y + 100x^2 - 4x = 0.$$

De aci deducem:

$$(1) \quad y = 10(2 - x) \pm \sqrt{100(2 - x)^2 - 100x^2 + 4x}$$

$$= 10(2 - x) \pm 2\sqrt{100 - 99x}.$$

Ţinând seamă că x şi y sunt numere de o singură cifră, ecuaţia (1) e satisfăcută numai pentru:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$$

Numărul căutat e prin urmare 18.

Soluţii date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila).

1404. — *Să se găsească trei numere astfel ca suma lor să fie egală cu produsul lor, produsul celui dintâi prin ultimul să fie egal cu suma dintre întâiul şi al 2-lea, iar produsul celui dintâi prin al 2-lea să fie egal cu diferenţa dintre al 3-lea şi primul.*

MIHAIL BOTEZ

Fie x, y şi z cele trei numere cerute. Scriind relaţiile ce există între ele, conform enunţului, avem următorul sistem de ecuaţii:

$$(1) \qquad \begin{cases} x+y+z=xyz \\ xz=x+y \\ xy=z-x \end{cases}$$

Vom rezolva acest sistem. Adunând ecuaţiile a 2-a şi a 3-a, avem:

$$x(z+y)=z+y,$$

sau:

$$(x-1)(y+z)=0.$$

De aci deducem:

$$(2) \quad x=1, \qquad (3) \quad z=-y.$$

Folosind ecuaţia (1), primele două ecuaţii din (1) devin:

$$(4) \qquad \begin{cases} 1+y+z=yz \\ z=y+1 \end{cases}$$

Prima ecuaţie din (4), ţinând seamă de a 2-a, ne dă:

$$1+y+y+1=y(y+1),$$

sau:

$$(y-2)(y+1)=0,$$

adică:

$$y=2 \quad \text{şi} \quad y=-1,$$

pentru care corespund pentru z, din a 2-a ecuaţie din (4):

$$z=3 \quad \text{şi} \quad z=0.$$

Sistemul (1) deci, folosind (2), admite sistemele de soluţii:

$$(5) \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad (6) \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$$

Folosind ecuaţia (3), primele două ecuaţii a sistemului (1) devin:

$$(7) \qquad \begin{cases} x=-xy^2 \\ -xy=x+y \end{cases}$$

Prima ecuaţie din (7) se mai poate scri:

$$x(1+y^2)=0,$$

deci:

$$x=0, \qquad y=\pm i, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

pentru care corespund din a 2-a ecuaţie din (7), respectiv:

$$y=0, \qquad x=\frac{\mp i}{1\pm i}.$$

Sistemul (1), în afară de sistemele de soluţii găsite (5) şi (6), mai admite şi următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{\mp i}{1\mp i} \\ y=\pm i \\ z=\mp i \end{cases}$$

Soluţii date de d-ra: *Popescu Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Anastasie Petrescu-Craioviţa*, *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Berinde Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Cotescu C.* (lic. Milit., Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Maşcaş Petru* (Şc. Polit, Timisoara), *Matei Dimitrie* (lic. Internat, Iaşi), *Matei D. Vasile* (lic. Milit., Tg Mureş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisă I. Gheorghe* (student, Iaşi), *Moisovici V. Ştefan* (Colegiu Naţional, Craiova), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Nicolaescu C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Rajka Z.* (lic. Orăstie), *Rauch Iosif* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rădulescu Octav* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosenberg I. Roman*, *Secară M. D-tru* (lic Internat, Iaşi), *Stoica N. D-tru* lic. Milit.. Tg-Mureş), *Tica P. Marin-Gal* şi *Toma N. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1408. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{a r_a^2}{r_a - r} = p(4R+r)$$

EMILIAN MEREUTA

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \qquad r = \frac{s}{p},$$

putem scri:

$$\frac{a r_a^2}{r_a - r} = \frac{a \cdot \frac{s^2}{(p-a)^2}}{\frac{s}{p-a} - \frac{s}{p}} = a \cdot \frac{s^2}{(p-a)^2} \cdot \frac{p(p-a)}{sa}$$

$$= \frac{sp}{p-a} = p r_a.$$

Rezultă deci că avem:

$$(1) \qquad \sum \frac{a r_a^2}{r_a - r} = p(r_a + r_b + r_c).$$

Cum este încă cunoscută relaţia:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

concludem că (1) devine:

$$\sum \frac{a r_a^2}{r_a - r} = p(4R + r).$$

Avem astfel stabilită relaţia din enunţ.

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel*, *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău). *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cotescu Costel* (lic Milit., Iaşi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc Milit de Artilerie), *Hompoţa I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N, Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş). *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisă I. Gheorghe* (student, Iaşi), *Murgu Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu Şt.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu-Craioviţa Anastasie*, *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Ţiţeica Ioan Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

Observare. D-l *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi) a stabilit încă două relaţii analoage.

1410. — *Se cere progresia aritmetică astfel ca scăzând pe rând din suma termenilor ei, raţia, numărul termenilor şi ultimul termen mărit cu raţia şi numărul termenilor, să obţinem respectiv numerile 74, 70, 47.*

M. AMARASTEANU

Fie a, l, n, r, s respectiv, primul termen, ultimul termen, numărul termenilor, raţia şi suma termenilor progresiei cerute. Intre aceste elemente putem scri, conform enunţului, următoarele relaţii:

$$(1) \qquad \begin{cases} s - r = 74 \\ s - n = 70 \\ s - (l + r + n) = 47 \\ l = a + (n-1)r \\ 2s = (a + l)n \end{cases}$$

Avem astfel un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute, care trebuie rezolvat.

Din a 2-a şi din prima ecuaţie deducem:

$$\begin{cases} s = 70 + n \\ r = s - 74 = 70 + n - 74 = n - 4. \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în ultimele trei ecuaţii a sistemului (1), obţinem:

$$\begin{cases} 70 + n - l - n + 4 - n = 47 \\ l = a + (n-1)(n-4) \\ 140 + 2n = (a + l)n, \end{cases}$$

sau:

$$(2) \qquad \begin{cases} l + n = 27 \\ l - a = (n-1)(n-4) \\ 2n + 140 = (a + l)n. \end{cases}$$

Inmulţind prima ecuaţie cu 2 şi scăzând pe a 2-a, avem:

$$a + l = 54 - 2n - (n-1)(n-4) = -n^2 + 3n + 50.$$

Inlocuind această valoare a lui $a + l$, în ecuaţia 3-a a sistemului (2), găsim:

$$2n + 140 = (-n^2 + 3n + 50)n$$

sau:

$$n^3 - 3n^2 - 48n + 140 = 0.$$

Primul membru anulându-se pentru $n = 7$, se descompune în doi factori şi avem:

$$(n-7)(n^2 + 4n - 20) = 0,$$

care rezolvată ne dă:

$$n = 7, \qquad n = -2 \pm 2\sqrt{6}$$

Cum n este întreg, fiind numărul termenilor unei progresii aritmetice, nu convine decât soluţia, $n = 7$.

Inlocuind această valoare $n = 7$, în prima ecuaţie a sistemului (2), obţinem:

$$l = 27 - 7 = 20.$$

Inlocuind pe l şi n astfel aflaţi în a 2-a ecuaţie a sistemului (2), avem:

$$20 - a = 6 \times 3 = 18,$$

deci:

$$a = 2.$$

Inlocuind aceste valori aflate pentru l, a, n în a 4-a ecuaţie din sistemul (1), obţinem:

$$20 = 2 + 6r,$$

de unde rezultă:

$$r = 3$$

Progresia aritmetică cerută este astfel:

$$\div\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20.$$

Soluţii date de d nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Godeanu I. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Receanu M C.*

PROBLEME PROPUSE

1497. — Să se găsească numerile întregi a, b, c, consecutive şi de două cifre ştiind că numărul $c^2 - a^2$ este răsturnatul numărului $b^2 - a^2$.

OCTAVIAN GH, RADULESCU

1498. — Să se găsească două numere de câte două cifre al căror raport să fie invers proporţional cu raportul format cu sumele cifrelor lor.

GH. CONSTANTINESCU

1499. — Să se determine p astfel în cât ecuaţiunea:

$$76\,(2 - x)^2 = p\,(6 - x)^2,$$

să aibă cel puţin o rădăcină cuprinsă între 0 şi 2.

G L GH BUICLIU

1500. — Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = p \\ ax - y + az = q \\ x + y + az = p \end{cases}$$

EUGEN VISA

1501. — Se dă triunghiul ABC cu laturile a, b, c. In A se duce perpendiculara AB_1 pe AC, astfel ca $AB_1 = c + a$; în B se duce perpendiculara BC_1 pe BA, astfel ca $BC_1 = a + b$; în C se duce perpendiculara CA_1 pe CB, astfel ca $CA_1 = b + c$. Se cere:

1°. Să se demonstreze că avem:

$$\widehat{BA_1C} + \widehat{CB_1A} + \widehat{AC_1B} < 135^0.$$

2°. Să se calculeze suprafaţa triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcţie de laturile a, b, c.

V. ALACI

1502. — Fie $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{A_2B_2}$ două segmente paralele, B intersecţia dreptelor $\overline{A_1B_2}$ şi $\overline{A_2B_1}$, A intersecţia paralelei dusă prin B la $\overline{A_1B_1}$ cu dreapta A_1A_2, C intersecţia dreptelor $\overline{AB_1}$ şi $\overline{A_1B}$, D intersecţia dreptelor $\overline{AB_2}$ şi $\overline{A_2B}$, C_1 şi D_1 intersecţiile dreptei $\overline{A_1A_2}$ cu paralele la A_1B_1 duse respectiv prin C şi D şi I intersecţia dreptelor $\overline{CD_1}$ şi $\overline{C_1D}$. Să se arate că:

$$\overline{AB} = 3\,\overline{AI}$$

L-T C. IONESCU-ŢIU

1503. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţia:

$$\sum [r_a\,(r_a + r_b)\,(r_a + r_c)] - 3\,r_a\,r_b\,r_c = (4R + r)^3 - 8R\,p^2 - 2ps,$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

POMPEIU MARICA

1504. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum a\,(b^3 - c^3)\cos^2\frac{A}{2} = 8\,p\,R^2\,(h_a + h_b + h_c)\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

CEZAR IVANESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăşteanu Marcel (1424), 1425, 1431, 1432, 1444, 1448, 1451, 1456), *Bălăuţă Gh.* (1470), *Breţean Constantin* (1470), *Dombrovschi Igor* (1466, 1470), *Ionescu Ţiu* (1466, 1470), *Lăzărescu Steliau* (1456, 1467, 1471, 1479, 1488, 1494), *Kornis Ernest* (1484, 1489, 1491, 1493, 1494, 1495), *Negrea Mircea-Leonte A.* (1464, 1473, 1475, 1476, 1479, 1480, 1481, 1483, 1484, 1477, 1488, 1491, 1494, 1495), *Poalelungi Gh. Valeriu* (1465, 1470), *Popovici C. Alexandru* (1466, 1470), *Postelnicescu M. C.* (N., 1234, 1291, 1334, 1420, 1433), *Rădulescu Gh. Octavian* (P., 1466, 1467, 1475, 1476, 1488), *Şerbănescu N. Ştefan* (147), *Ştefănescu Aurel* (1473), *Ştefănescu D. Nicolae* (1489, 1491, 1494), *Teodorescu V. Vasile* (1470), *Zagaican Ilie* (1420, 1431, 1433, 1440, 1441, 1470, 1491, 1494).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 AUGUST 1936 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. THÉBAULT SUR DES TRIANGLES SPÉCIAUX.
2. GH. CONSTANTINESCU: O PROBLEMA DE TEORIA NUMERILOR.
3. NOTE MATEMATICE: 11.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 335, 1409, 1411, 1412, 1415, 1416, 1417, 1420.
6. PROBLEME PROPUSE: 1505-1512
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — No. 6 TIMISOARA, 15 AUGUST 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR DES TRIANGLES SPÉCIAUX

PAR V. THÉBAULT
LE MANS (FRANCE)

La présente note attire d'abord l'attention des jeunes lecteurs sur un théorème et des relations qui conduisent à de nombreuses propriétés de points et de droites remarquables du triangle.

1. **Théorème.** *Soient dans le plan d'un triangle* A B C *un point* P *et une transversale* $\beta\gamma$ *qui rencontre les côtés* A B, A C *respectivement en* γ *et* β. *On mène les droites* B B′, C C′, *qui se coupent en* P, *et l'on pose:*

$$\frac{\overline{B\gamma}}{\overline{\gamma A}}=x,\quad \frac{\overline{C\beta}}{\overline{\beta A}}=y,\quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=m,\quad \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}=n.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\beta\gamma$ *passe par* P *est que l'on ait la relation:*

$$(1)\qquad m\,x+n\,y=1.$$

En effet, plaçons en A, B, C des masses proportionnelles à 1, m, n; leur barycentre sera le point P. Dès lors, si on appelle d_1, d_2, d_3 les distances algébriques de A, B, C à $\beta\gamma$, et si l'on écrit que la somme algébrique des moments des masses autour d'un axe $\beta\gamma$ passant par le barycentre est nulle, on a:

$$d_1+d_2\,m+d_3\,n=0.$$

Si l'on remarque, en outre, que les rapports $\frac{d_2}{d_1}$ et $\frac{d_3}{d_1}$ valent $-x$ et $-y$, on obtient:

$$m\,x+n\,y=1.$$

Inversement, si la relation (1) existe, la somme algébrique des moments des masses 1, m, n autour de $\beta\gamma$ est nulle, et il en résulte que $\beta\gamma$ passe par le barycentre du système des masses considérées. La relation (1) est donc *nécessaire et suffisante* pour que β, P, γ soient en ligne droite.[1]

2. Soient O, I les centres des cercles circonscrit et inscrit, G le barycentre, Γ le point de *Gergonne*, ν le point de *Nagel* d'un triangle de côtés B C $=a$, C A $=b$, A B $=c$.

Pour chacun de ces points, on a successivement:

$$(2)\quad 1^0.\quad m=\frac{\sin 2B}{\sin 2A},\quad n=\frac{\sin 2C}{\sin 2A},$$

$$x\,.\sin 2B+y\,.\sin 2C=\sin 2A$$

ou, en fonction des côtés:

$$(3)\quad b^2x(a^2+c^2-b^2)+c^2y(a^2+b^2-c^2)=a^2(b^2+c^2-a^2);$$

$$(4)\quad 2^0.\quad m=b:a,\ n=c:a,\quad bx+cy=a;$$

$$(5)\quad 3^0.\quad m=n=1,\qquad x+y=1;$$

$$(6)\quad 4^0.\ m=\frac{p-a}{p-b},\ n=\frac{p-a}{p-c},\ \frac{x}{p-b}+\frac{y}{p-c}=\frac{1}{p-a};$$

$$(7)\quad 5^0.\ n=\frac{p-b}{p-a},\ n=\frac{p-c}{p-a},\ (p-b)x+(p-c)y=p-a.$$

3. De ces équations on déduit facilement les rapports x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3, x_4 et y_4 qui caractérisent les points d'intersection β_1 et γ_1, β_2 et γ_2, β_3 et γ_3, des droites O I, G Γ, I Γ, $\Gamma\nu$ avec les côtés A B et A C du triangle.

On a, en valeurs absolues:

1°. O I.

$$(8)\quad x_1=\frac{a}{b}\cdot\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{p-a}{p-b},\quad y_1=\frac{a}{c}\cdot\frac{b-a}{b-c}\cdot\frac{p-c}{p-a}.$$

2°. G Γ.

$$(9)\quad x_2=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{p-b}{p-a},\quad y_2=\frac{b-a}{b-c}\cdot\frac{p-c}{p-a}.$$

---

[1]) *Journal de Vuibert*, XXXVIII—86. Nous avons étendu ce théorème au tétraèdre, *G. M.*, XXXVII—241. (*V. T.*).

3°. $I\Gamma$.

$$(10)\quad x_3 = \frac{c-a}{c-b}\cdot\left(\frac{p-b}{p-a}\right)^2,\quad y_3 = \frac{b-a}{b-c}\cdot\left(\frac{p-c}{p-a}\right)^2.$$

4°. Γv.

$$(11)\quad x_4 = \frac{b}{a}\cdot\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{p-b}{p-c},\quad y_4 = \frac{c}{a}\cdot\frac{b-a}{b-c}\cdot\frac{p-c}{p-a}.$$

Pour obtenir ces valeurs de x et y, il suffit de résoudre les systèmes d'équations (3) et (4), (5) et (6), (6) et (7).

4. Dans la relation fondamentale (1), on peut intervertir les rapports m et x, n et y. Dès lors:

1°. La condition nécessaire et suffisante pour que les droites $B\beta_1$ et $C\gamma_1$ se coupent sur Γv est que l'on ait la relation:

$$(12)\quad x_4\cdot\frac{1}{x_1}+y_4\cdot\frac{1}{y_1}=1,$$

soit:

$$(13)\quad \frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}=1,$$

autrement dit, que le triangle ABC soit *rectangle* en A.

2°. La condition nécessaire et suffisante pour que les droites $B\beta_2$ et $C\gamma_2$ se coupent sur $I\Gamma$ est que l'on ait:

$$(14)\quad x_3\cdot\frac{1}{x_2}+y_3\cdot\frac{1}{y_2}=1,$$

soit:

$$(15)\quad \frac{p-b}{p-a}+\frac{p-c}{p-a}=1;$$

d'où:

$$(16)\quad 3a=b+c.^{1)}$$

3°. La condition nécessaire et suffisante pour que les droites $B\beta_4$ et $C\gamma_4$ se coupent sur $G\Gamma$ est que l'on ait:

$$(17)\quad x_2\ \frac{1}{x_4}+y_2\ \frac{1}{y_4}=1,$$

soit:

$$(18)\quad \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=1;$$

d'où:

$$(19)\quad \frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

5. Voici d'autres propriétés du triangle spécial, dont les longueurs des côtés vérifient la relation:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

qui sont faciles à vérifier.

Soient A_m, B_m, C_m les milieux des côtés BC, CA, AB de ce triangle; Q_a, Q_b, Q_c les pieds des bissectrices intérieures; J_1 et J_2 les points de *Jerabek*; h_a, h_b, h_c les longueurs des hauteurs AA', BB', CC'.

1°. *Si l'on donne* $b > c$, *on doit avoir:*

$$b < \frac{c}{4}(1+\sqrt{17});$$

2°. *Le barycentre* G *est sur la droite* $Q_b Q_c$ [1];

3°. *Les parallèles à* AB *et* AC, *par* Q_a, *forment avec ces côtés un losange de côté* a;

4°. *La perpendiculaire à* AQ_a *en* Q_a *rencontre* AB *et* AC *à la distance* $2a$ *de* A;

5°. *Le réciproque de* I *est sur* $B_m C_m$;

6°. *Les coordonnées normales absolues de* J_1 *et* J_2 *sont:*

$$\frac{1}{2}h_c,\ \frac{1}{2}h_b,\ \frac{a^2}{4R};\quad \frac{1}{2}h_b,\ \frac{a^2}{4R},\ \frac{1}{2}h_c;$$

7°. *Les côtés* $A_m B_m$ et $A_m C_m$ *du triangle complémentaire passent chacun par un point de Jerabek;*

8°. *On a:*

$$AQ_a = 2a\cos\frac{A}{2};$$

9°. Portons sur CA, AB les longueurs $CL = AL' = a$ et soient N, N' les isotomiques de L et L': *les droites* BL *et* CL', BN *et* CN' *se coupent sur la médiane* AA_m.

10°. *L'ellipse de Steiner circonscrite au triangle passe par le centre* I_a *du cercle exinscrit dans l'angle* A.[2]

---

[1]) Ce triangle est très connu. De nombreuses propriétés figurent dans la *Bibliographie des triangles spéciaux* de *J. Neuberg* et *R. Goormaghtigh*, (*Société royale des sciences de Liège*, 1924 et 1925).

[1]) *R. Goormaghtigh, Journal de Vuibert*, 59e année, 190.

[2]) Cette propriété est due à *J. Déprez, Mathesis*, 1923-162.

O PROBLEMĂ DE TEORIA NUMERILOR

De Prof. Gh Constantinescu

Să se determine valorile întregi p şi q astfel ca expresiunea:

$$E=\frac{p^2+a^2}{q^2+b^2},$$

să fie întreagă, a şi b fiind două numere întregi date. Numerile a şi b le putem presupune prime între ele, căci dacă n'ar fi prime, ar avea un divizor comun d şi în acest caz punem $p=dp'$, $q=dq'$ şi expresiunea ar deveni:

$$E=\frac{p'^2+a'^2}{q'^2+b'^2},$$

deci forma lui E nu s'ar schimba.

Câtul dintre numărător şi numitor trebue să fie şi el de forma sumei a două patrate perfecte, căci toţi divizorii numărătorului sunt de aceiaş formă.

Punem acest cât egal cu $\alpha^2+\beta^2$, unde α şi β sunt primi între ei şi astfel vom avea:

$$p^2+a^2=(q^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=(q\alpha\pm b\beta)^2+(q\beta\mp b\alpha)^2,$$

α şi β fiind nederteminate, putem pune condiţiunea ca $q\beta-b\alpha=+a$ şi atunci corespunde a 2-a egalitate $p=q\alpha+b\beta$, care ne dă valorile lui p.

Prima ecuaţie:

$$q\beta-b\alpha=a,$$

este satisfăcută numai dacă q este prim cu b, căci α şi β sunt dela început luaţi primi între ei.

Rezultă că q nu poate fi decât de forma $q=b\lambda\pm\mu$, unde μ poate lua toate valorile mai mici ca $\frac{b}{2}$ şi prime cu b.

Luăm pentru q una din aceste forme:

$$q=b\lambda\pm\mu$$

şi să presupunem că α_1 şi β_1 este o soluţie a ecuaţiei:

$$q\beta-b\alpha=1,$$

rezultă că ecuaţia:

$$(b\lambda+\mu)\beta-b\alpha=1,$$

are ca soluţie particulară pe:

$$\beta=\beta_1 \quad \text{şi} \quad \alpha=\beta_1\lambda+\alpha_1$$

şi deci:

$$\beta=bt+a\beta_1$$
$$\alpha=(b\lambda+\mu)t+a(\beta_1\lambda+\alpha_1),$$

este soluţia generală a ecuaţiei:

$$q\beta-b\alpha=+a.$$

In acelaş mod găsim, că:

$$\beta=bt-a\beta_1 \quad \text{şi}$$
$$\alpha=(b\lambda-\mu)t-a(\beta_1\lambda-\alpha_1),$$

este soluţia aceleiaşi ecuaţiuni când luăm pe $q=b\lambda-\mu$.

In modul acesta am determinat valorile lui q, α şi β în funcţie de 2 parametri arbitrari λ şi t pentru că μ este perfect determinat, fiind un număr mai mic ca $\frac{b}{2}$ şi prim cu b.

Inlocuim aceste valori ale lui α, β şi q în expresiunea lui $p=q\alpha+b\beta$ şi găsim şi valoarea lui p pentru care expresiunea E este întreagă:

$$p=(b\lambda\pm\mu)[(b\lambda\pm\mu)t\pm a(\beta_1 t\pm\alpha_1)]$$
$$+b(bt\pm a\beta_1).$$

Dăm acum lui μ toate valorile mai mici ca $\frac{b}{2}$ şi prime cu b şi astfel găsim toate valorile lui p şi q pentru care expresiunea E este întreagă.

Exemplu:

$$E=\frac{p^2+9}{q^2+169}=\alpha^2+\beta^2,$$

vom avea:

$$p^2+9=(q^2+169)(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=(q\alpha\pm 13\beta)^2+(9\beta\mp 13\alpha)^2.$$

Punem $9\beta-13\alpha=3$ şi atunci rezultă că:

$$9\alpha+13\beta=p.$$

Numărul q trebue să fie prim cu 13 şi deci va fi de forma:

$$q=13\lambda\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6.$$

Să luăm pe rând toate aceste forme ale lui q.

1°. $q=13\lambda+1$.

Ecuaţia $(13\lambda+1)\beta-13\alpha=3$ are o soluţie particulară $\beta=3$ şi $\alpha=3\lambda$ şi deci soluţia generală a acestei ecuaţiuni va fi:

$$\beta=13t+3$$
$$\alpha=(13\lambda+1)t+13\lambda.$$

In acelaş mod procedăm pentru $q=13\lambda-1$ şi găsim:

$$\beta=13t\pm3$$
$$\alpha=(13\lambda\pm1)\pm3x.$$

Soluţia generală a ecuaţiunei:

$$(13\lambda\pm1)\beta-13\alpha=3.$$

Inlocuim aceste valori ale lui α, β şi q în valorile lui:

$$p=13q\alpha+13\beta$$

şi găsim:

$$p=(13t\pm1)[(13\lambda\pm1)t\pm3\lambda]+13(13\lambda\pm3).$$

2°. $q=13\lambda\pm2$.

Soluţia generală a ecuaţiunei:

$$(13\lambda\pm2)\beta-13\alpha=3,$$

va fi:

$$\beta=13\lambda\mp18$$
$$\alpha=(13\lambda\pm2)t\mp3(6\beta\pm1),$$

iar pentru:

$$p=(13\lambda\pm2)[(13\lambda\pm2)t\mp3(6\beta\pm1)]$$
$$+13(13\lambda+18).$$

3°. $q=13\lambda\pm3$.

Soluţia generală a ecuaţiei:

$$(13\lambda\pm3)\beta-13\alpha=3,$$

va fi:

$$\beta=13\lambda\mp12$$
$$\alpha=(13\lambda\pm3)t\mp3(4\lambda\pm1),$$

iar pentru:

$$p=(13\lambda\pm3)[(13\lambda\pm3)t\mp3(4\lambda+1)]+$$
$$13(13\lambda\mp18).$$

4°. $q=13\lambda\pm4$.

Soluţiunea generală a ecuaţiunei:

$$(13\lambda\pm4)\beta-13\alpha=3,$$

va fi:

$$\beta=13t\mp9$$
$$\alpha=(13\lambda\pm4)t\mp3(3\lambda\pm1)$$

şi pentru:

$$p=(13\lambda\pm4)[(13\lambda\pm4)t\mp3(3\lambda\pm1]$$
$$+13(13t\mp9).$$

5°. $q=13\lambda\pm5$.

Soluţia generală a ecuaţiei:

$$(13\lambda\pm5)\beta-13\alpha=3,$$

va fi:

$$\beta=13t\mp15$$
$$\alpha=(13\lambda\pm5)t\mp3(5\lambda\pm2)$$

şi pentru:

$$p=(13\lambda\pm5)[(13\lambda\pm5)t\mp3(5\lambda\pm2)]$$
$$+13(13t\mp15).$$

6°. $q=13\lambda\pm6$.

Soluţia generală a ecuaţiei:

$$(13\lambda\pm6)\beta-13\alpha=3,$$

va fi:

$$\beta=13t\mp6$$
$$\alpha=(13\lambda\pm6)t\mp3(2\lambda+1)$$

şi pentru:

$$p=(13\lambda\pm6)[(13\lambda\pm6)t\mp3(2\lambda\pm1)]$$
$$+13(13t\mp6).$$

NOTE MATEMATICE

11. — *Soluţiunile întregi ale ecuaţiunei:*

$$x^2-a_1^{2p_1+1}a_2^{2p_2+1}\dots a_k^{2p_k+1}y^2=1,$$

când se cunoaşte o singură soluţie a ecuaţiei:

$$x^2-a_1a_2\dots a_ky^2=1.$$

Vom lua mai înainte un caz particular:

(1) $$x^2-a^{2p+1}y^2=1,$$

unde a este un număr prim.

Punem $a^p y = u$ şi ecuaţia (1), devine:

$$x^2 - a u^2 = 1, \tag{2}$$

din care rezultă că soluţiile ecuaţiei (1) se găsesc printre soluţiile ecuaţiei (2) şi anume acela cari are pe u divizibil cu a^p.

Soluţiunile ecuaţiei (2) sunt, după cum am dovedit în „R. M. T.“, anul XVI, No. 2:

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & x_1 & x_2 \ldots x_n \\ u & 0 & u_1 & u_2 \ldots u_n \end{array} \tag{3}$$

unde:

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \quad \text{şi} \quad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} u_1, \quad \begin{matrix} \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 2x_1 \end{matrix} \tag{4}$$

Să dovedim că x_{2k} din şirul 3, este de forma $m a + 1$.

Din ecuaţiunea (2), pusă sub forma $\frac{x^2 - 1}{a} = u^2$, se deduce că x este de forma $m a \pm 1$, iar din (4), avem:

$$x_{2k} = \frac{\alpha^{2k} + \beta^{2k}}{2} = \frac{(\alpha^k + \beta^k)^2 - 2}{2} = 2x_k^2 - 1. \tag{5}$$

Cum $x_k = m a \pm 1$, rezultă că $x_{2k} = m a + 1$. Odată stabilită această proprietate, să cercetăm şi valoarea lui u_{2i+1}.

Din (4), avem:

$$u_{2i+1} = \frac{\alpha^{2i+1} - \beta^{2i+1}}{\alpha - \beta} u_1 = \tag{6}$$

$$(S_{2p} + S_{2p-2} + \cdots + 1) u_1,$$

unde:

$$S_{2i} = \alpha^{2i} + \beta^{2i}.$$

Cum $x_i^2 = m a + 1$, urmează că $S_{2i} = m a + 2$ şi deci:

$$u_{2i} + 1 = (m a + 2i + 1) u_1. \tag{7}$$

Din (7) deducem că dacă luăm pe $2i + 1 = a$, găsim pentru u_{2i+1} un multiplu de a şi deci x_a şi u_a va fi o soluţie a ecuaţiunii $x^2 - a^3 u^2 = 1$.

Să arătăm acum că toţi termenii u_{ka} sunt multipli de a.

In adevăr din (4), avem:

$$u_{ka} = \frac{\alpha^{ka} - \beta^{ka}}{\alpha - \beta} u, \tag{8}$$

şi cum numărătorul $\alpha^{ka} - \beta^{ka}$ se împarte cu $\alpha^a - \beta^a$ rezultă că u_{ka} se împarte cu u_a şi deci şi cu a.

Luăm acum din şirul (3) următorii termeni:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 1 & x_a & x_{2a} & \ldots & x_{ka} \\ u & 0 & u_a & u_{2a} & \ldots & u_{ka} \end{array} \tag{9}$$

Acest şir este şi el un şir recurent de gradul al 2-lea; pentru a dovedi aceasta, ar trebui să arătăm că un termen din şir se formează din suma celor 2 precedenţi înmulţiţi respectiv cu $2x_a$ şi -1.

Să dovedim pentru x_{2a} şi u_{2a}.

In adevăr avem:

$$\begin{aligned} x_{2a} &= \frac{\alpha^{2a} + \beta^{2a}}{2} = \frac{(\alpha^a + \beta^a)^2 - 2}{2} = 2x^2 a - 1 \\ u_{2a} &= \frac{\alpha^{2a} - \beta^{2a}}{2} u_1 = \frac{\alpha^a + \beta^a}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha^a - \beta^a}{\alpha - \beta} u_1 \\ &= 2 x_a u_a. \end{aligned} \tag{10}$$

Din (10) rezultă că (9) este un şir recurent de gradul al 2-lea. In acelaş mod se găseşte că termenii de forma $u_k a^2$ se împart cu a^2 şi termenii $u_k a^p$ se impart cu a^p.

Rezultă deci că $x = x_{ap}$ şi $u = u_{ap}$, care este o soluţie a ecuaţiunei $x^2 - a u^2 = 1$, ne va da pe $x = x_{ap}$ şi $y = \frac{u_{ap}}{a^p}$, o soluţiune pentru ecuaţiunea $x^2 - a^{2p+1} y^2 = 1$.

Cu ajutorul acestei soluţiuni şi cu soluţiunea banală $x = 1$ şi $y = 0$, găsim şirul recurent, care reprezintă toate soluţiile ecuaţiuni $x^2 - a^{2p+1} y^2 = 1$.

Cazul general, când ecuaţiunea este de forma:

$$x^2 - a_1^{2p_1+1} \cdot a_2^{2p_2+1} \ldots a_k^{2p_k+1} y^2 = 1.$$

Punem $a_1, a_2 . a_3 \ldots a_k = a$ şi soluţiile acestei ecuaţiuni sunt:

$$\begin{array}{l} 1, x_1, x_2 \ldots x_n \\ 0, y_1, y_2 \ldots y_n \end{array}$$

Numerile $a_1 a_2 \ldots a_k$ fiind prime, urmează că x_1 va fi de forma $x_1 = m a_i \pm 1$ şi deci x_{2k} va fi de forma $m a_i + 1$, urmează deci că $x a_i^p$ şi $y a_i^p$, care este o soluţie a ecuaţiei $x^2 - a y^2 = 1$, va avea pe $y a_i^p$ divizibil cu $a_i^{p_i}$ şi pentru ca y să fie divizibil cu $a_1^{p_1} a_1^{p_2} \ldots a_{k_1}^p$, trebue să luăm cel

mai mic multiplu comun al lui $a_1^{p_1}$, $a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}$ şi dacă îl însemnăm cu M, atunci Y_M va fi divizibil cu $a_1^{p_1} \ldots a_k^{p_k}$ şi deci x_M şi $\dfrac{Y_M}{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}}$ vor fi soluţiuni ale ecuaţiei propuse.

GH. CONSTANTINESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *The American Mathematical Montly*, vol. XLIII, No. 5, Mai 1936.

2. *Revista Cercului de Studii al Şcoalei Superioare P T. T.*, anul V, No. 5, Timişoara (litografiat) Criterii de comparaţie, de Ing. *I. C. Schileru.* Propunere pentru examene profesionale, de Ing. *I. C. Schileru.* Pagina matematică, Probleme propuse şi rezolvate.

3. *Numerus.* Revistă de matematici elementare, vol. 2. caietele 11, 12, 13, 14, 15, anul 1936, Director *R N Raclişş.* Insemnătatea ştiinţelor matematice, de *G. Ţiţeica.* (Extras din Discursul de Recepţie la Academia Română). Aforisme matematice. Rezultatul Concursului „*Spiru Haret*", de *R. N. Raclis, Virgil Claudian, Cezar Cosniţă.* Probleme propuse şi rezolvate.

4. *V. Thébault.* Mélanges Mathématique: Géométrie du tétraèdre et Théorie des nombres. (Supplément, Mathesis, 1936).

5. *V. Thébault.* Triangle bordé de rectangles. (Extrait, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.)

6. *Th. Anghelutză.* Sur l'intégrale de *M. Denjoy.* (Extras din Mathematica, Cluj 1936.)

7. *V. Thébault.* Sur le tranchet d'Archimède. (Extrait de l'Enseignement mathématique, N-os 5—6, 34-e année, 1935.)

PROBLEME REZOLVATE

335. — *O dreaptă* Δ *se roteşte în spaţiu în jurul unui punct fix* P. *Se cere locul geometric al piciorului perpendicularei scoborâte dintr'un punct fix* M *pe* Δ.

LT. COMANDOR GR ZAPAN

Deosebim două cazuri.

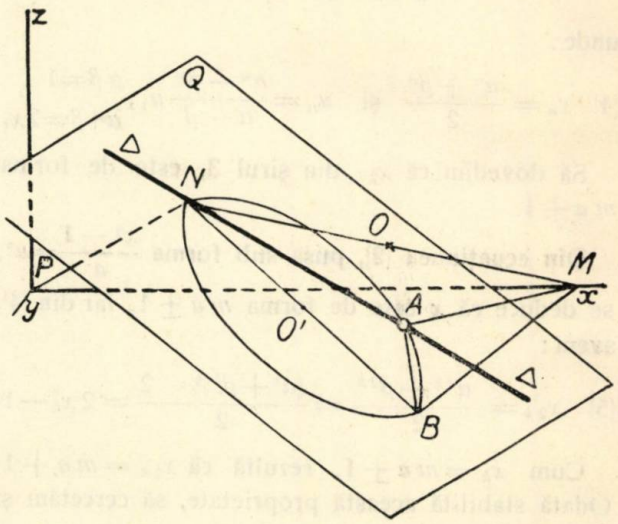
Cazul I. Δ *trece prin P.* Fie A proecţia lui M pe Δ şi O mijlocul lui P M. In triunghiul dreptunghic M A P, avem:

$$O A = O M = O P = \text{const.}$$

deci A *descrie sfera de diametru* M P.

Cazul II. Δ *nu trece prin* P *dar se află în mod constant la distanţa d de* P, cu alte cuvinte Δ se găseşte totdeauna în un plan Q tangent într'un punct oarecare N al sferei cu centrul în P şi cu raza *d.*

Fie O mijlocul lui M N şi A proecţia lui M pe Δ Se proectează M în B pe planul Q, evident că unghiul N B M este drept şi fiind-că N A M este



drept, în virtutea teoremei celor trei perpendiculare şi unghiul N A B este drept.

Rezultă că dacă Δ se roteşte în jurul lui N în planul Q, punctul A va descrie în acest plan cercul de diametru N B.

Considerând toate punctele N ale sferei (P, *d*) se vor găsi o infinitate de cercuri ca precedentul, ale căror puncte sunt loc al lui A.

Se poate arăta pe cale analitică că în cazul al 2-lea nu se poate găsi locul lui A.

Fie P M axa de x şi P y, P z celelalte axe ale unui sistem dreptunghiular de axe. Notăm cu (x_1, y_1, z_1) coordonatele lui N şi cu $(a, 0, 0)$ pe ale lui M. Coordonatele lui O vor fi:

$$\left(\frac{a + x_1}{2}, \frac{y_1}{2}, \frac{z_1}{2}\right),$$

iar:

$$\overline{N M}^2 = (a - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + d^2 - 2 a x_1,$$

ţinând seamă că N (x_1, y_1, z_1) se află pe sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - d^2 = 0.$$

Punctul A se găseşte la intersecţia (care este un cerc) planului Q cu sfera de diametru N M. Ori ecuaţia planului Q şi a acestei sfere sunt respectiv:

$$(1) \qquad x x_1 + y y_1 + z z_1 - d^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{a+x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{\overline{N M}^2}{4} = \frac{a^2 + r^2 - 2 a x_1}{4}$$

*** (2) $x^2 + y^2 + z^2 - (a + x_1) x - y_1 y - z_1 z + a x_1 = 0,$

locul lui A s-ar afla eliminând pe x_1, y_1, z_1 între relaţiunile (1), (2) şi:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - d^2 = 0,$$

ceia-ce nu se poate, numărul parametrilor fiind mai mare ca al relaţiunilor de condiţie.

Notă. Problema 335 propusă în Martie 1924, la pag. 14 al Vol. IV, a fost atacată de mulţi corespondenţi, care s-au înşelat asupra enunţului punându-se în cazul particular al dreptei Δ trecând prin P. Singuri d-nii *Avram I.* (pe atunci la Lic. din Buzău), *Lt-Col. E. Manoil* (pe atunci maior) şi *Teodorescu M. D.* (pe atunci la lic. M. Viteazul din Bucureşti) au prins ceva din înţelesul adevărat al enunţului, dar nu au găsit rezultatul bun.

Iată numele corespondenţilor, care s-au ocupat cu problema 335 şi rezultatele la care au ajuns:

1°. D-l *Lt-Col. M. Manoil* rezolvă problema în plan pentru cazul când Δ e tangentă unui cerc cu centrul în P, găseşte locul lui A un melc al lui *Pascal* şi conchide că în spaţiu locul e o suprafaţă generată prin o rotaţie a acestui melc în jurul axului său. Se poate vedea din soluţia geometrică că A nu descrie o suprafaţă, ci un spaţiu care nu se poate determina ca formă.

2°. D-l *Avram I.* (lic. Buzău) afirmă că locul e suprafaţă de forma... inimioarei.!

3°. D-l *Teodorescu M. D.* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti) a considerat problema în plan, când Δ e tangentă la un cerc şi a găsit locul un melc al lui *Pascal.*

4°. Au considerat cazul I şi au găsit locul o sferă d-nii: *Arsene A.* (lic. Milit., Iaşi), *Bosie V.* (lic. Internat, Iaşi), *Botea N.* (lic. Cantemir Vodă, Bucureşti), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Ciorănescu I. C.* (lic. Mânăstirea Dealului), *Corşăreanu Gh. Gh.* (Târgu-Jiu), *Coşniţă C.* (Bârlad), *Dinescu Fl.* (lic. Ploeşti), *Dinu S. D.* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Drăgan Gh.* (Braşov), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Goldstein N.* (Şc. Polit, Timişoara), *Gradin I. Gh.* (cl. 8 particulară), *Ionescu I. P.* (lic. Mânăstirea Dealului), *Ionescu-Bujor C.* (lic. Cantemir-Vodă, Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Musta S.* (Cluj), *Nicolescu P. V.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Percea V.* (lic. Timişoara), *Râmniceanu I. Cr.* (lic. Milit, Iaşi), *Râmniceanu R.* (lic. Tg-Jiu), *Roman I. I.* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Savin C. I.* (lic. Milit., Iaşi), *Segal L.* (lic. Botoşani), *Şerban A.*, *Silion Gh. I.* (lic. Braşov), *Silişteanu C. C.* (Ploeşti), *Spârchez Z.* (Şc. Polit., Timişoara), *Stamatiu I. M.* (Şc Polit., Bucureşti), *Ştefulescu I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Virgil Gr.* (lic. Tg. Jiu), *Weiss S.* (lic. Galaţi) şi *Zagaican I.* (Şc. Conductori, Chişinău).

5°. Au considerat că Δ trece prin P şi se mişcă numai în planul (M, Δ) găsind locul un cerc d-nii: *Angelescu N. Tr.* (lic. Titu Maiorescu, Giurgiu), *Beldie N. D.* (lic. R-Sărat, *Bercovici S.* (Piteşti), *Frătici I.* (lic. Braşov), *Georgescu-Val N. I.* (Sub-Lt. Dadilov), *Ghelber M.* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Lepădatu I. M.* (Cahul), *Olariu T. E.* (student Polit), *Papadopol C. C.* (Bucureşti), *Paşco V.* (Cernăuţi), *Pascu D.* (lic. Braşov), *Podariu Al.* (lic. Piatra Neamţ), *Sub-Lt Popescu M. I.* (Cluj), *Şeitan I.*, *Şerban I. T.* (lic. Braşov), *Ţanovici V. C.* (Ploeşti), *Tărăbuţă C. P.* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Ţigoiu Z. I.* (Şc. Comercială, Constanţa), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Diaconovici Loga, Timişoara) şi *Zamfirescu Gh. I.* (lic. Piteşti).

S-au menţinut în paranteze şcolile şi localităţile în care se aflau corespondenţii la data trimiterei soluţiilor.

Gh. B.

1409. — *Să se afle patratul perfect de forma a b a b a, diferenţa dintre b şi a fiind un număr prim.*

M. C. POSTELNICESCU

Terminaţiile de două cifre semnificative, ale unui patrat perfect, sunt:

(1) 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96

(Culegere de Probleme, Cap. XXXIX).

Ţinând seamă că patratul cerut *a b a b a* este astfel că:

$$b - a = \text{număr prim},$$

rezultă că din şirul (1) nu putem păstra pentru *b a*, de cât numerile:

21, 41, 61, 64, 76, 81, 96.

Patratul cerut *a b a b a* se găseşte deci printre numerile:

(2) 12121, 14141, 16161, 46464, 67676, 18181, 69696.

Stergem dintre acestea pe 16161 şi 46464, care se divid cu 3 dar nu şi cu 9, deci nu sunt patrate perfecte.

Extrăgând apoi rădăcina patrată din numerile rămase în şirul (2), găsim că numai 69696 este patrat perfect:

$$69696 = 264^2,$$

şi formează singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-ra: *Naneş Cornelia* (studentă) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Bucur N. Virgiliu* (lic. Milit, Iaşi), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dâlban Gh.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Moisă I. Gh.* (student, Iaşi), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craioviţa Anastasie*, *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Rajka Z.* (lic. Orăstie), *Receanu M. C*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu D. N.* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Tica P. Marin-Gall.*

1411. — *Să se arate că avem:*

$$\frac{(cd-ab)^2-(a+b-c-d)[ab(c+d)-cd(a+b)]}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}=1.$$

V ALACI

Pentru $a=c$, numărătorul N al fracţiei din primul membru, devine:

$$N_{a=c}=c^2(d-b)^2-(b-d)[cb(c+d)-cd(c+b)]=$$
$$c(d-b)(cd-cb+bc+bd-dc-db)\equiv 0.$$

Numărătorul N se anulează şi pentru $a=d$, $b=c$, $b=d$, deci rezultă că el se divide şi prin $(a-d)$, $(b-c)$, $(b-d)$.

Cum aceşti factori $(a-c)$, $(a-d)$, $(b-c)$, $(b-d)$ în general sunt primi, rezultă că N se divide şi cu produsul lor şi cum N este omogen şi de gradul al 4-lea, este de forma:

$$(1)\quad N=(cd-ab)^2-(a+b-c-d)[ab(c+d)-$$
$$cd(a+b)]\equiv k(a-c)(a-d)(b-c)(b-d),$$

unde k este un număr ce'l determinăm particularizând pe a, b, c, d.

Astfel pentru $a=0$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, relaţia (1) devine:

$$6^2-(-4)(-6)=k(-2)(-3)(-1)(-2),$$

deci:

$$k=\frac{12}{12}=1.$$

Rezultă că putem scri:

$$N=(a-c)(a-d)(b-c)(b-d),$$

de unde:

$$\frac{N}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}=1.$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-rile: *Naneş Cornelia* (studentă), *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Bejenaru Gh. Victor* (lic. Mihaiu-Viteazul, Tg-Mureş), *Boborodea I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic Huşi), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu C. Costică* (lic. Milit., Craiova), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dobrin Virgil* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Dulămiţă Gr. Tuţu* (lic. Milit., Craiova), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Jarda Radu* (lic Milit., Tg-Mureş), *Lăzărescu P. Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Mişca C. Kivu* (lic. Focşani), *Moisă I. Gheorghe* (student, Iaşi), *Munteanu V. Lazăr* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Murgu V. Martian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craioviţa Anastasie*, *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit, Timişoara), *Rădulescu Octav*, *Receanu M. C*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1412. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\Sigma x(y^2-z^2)-\Sigma(x-y)(x+y)^2=$$
$$2(x-y)(y-z)(z-x)$$

GRIGORE V MARTES

Desfăcând parantezele în primul membru, pe care să'l notăm cu E, putem scri succesiv:

$$E=xy^2-xz^2-(x^3+x^2y-xy^2-y^3)+$$
$$yz^2-yx^2-(y^3+y^2z-yz^2-z^3)+$$
$$zx^2-zy^2-(z^3+z^2x-zx^2-x^3)=$$
$$2(xy^2-xz^2-x^2y+x^2z+yz^2-zy^2)=$$
$$2[x(y^2-z^2)-x^2(y-z)-zy(y-z)]=$$
$$2(y-z)[x(y+z)-x^2-zy]+$$
$$2(y-z)[z(x-y)-x(x-y)]=$$
$$2(y-z)(x-y)(z-x).$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-ra : *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii : *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Chirvai I. Vasile* (lic. Beiuş), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Lăzărescu P. Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (iic. Beiuş), *Matei D. Dtru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N N.* (lic. Beiuş), *Moisă I. Gheorghe* (student, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rădulescu Octav, Secară M. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu) *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tica P. Marin-Gall.*

1415. — *Cele trei laturi a, b, c ale unui triunghiu fiind în progresie aritmetică, se cere:*

1°. *Să se stabilească relaţiile:*

$$2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2},\qquad 3\sin^2\frac{B}{2}=\sin A\sin C.$$

2°. *Să se arate că dacă raţia progresiei este egală cu raza cercului înscris, triunghiul este dreptunghic.*

CEZAR IVANESCU

1°. Dacă $q>0$ este raţia progresiei aritmetice, avem presupunând $a>b>c$:

$$a=b-q,\qquad c=b+q,$$

deci:

$$a+c=2b \tag{1}$$

Cum:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R, \tag{2}$$

relaţia (1) devine înlocuind laturile cu valorile lor scoase din (2):

$$\sin A+\sin C=2\sin B. \tag{3}$$

Această relaţie se mai poate scri:

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Simplificând prin $2\cos\frac{B}{2}$, fiindcă:

$$\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2},$$

deoarece:

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{B}{2},$$

obţinem:

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2},$$

ceeace constitue prima din relaţiile cerute.

Pentru a stabili a 2-a relaţie cerută, considerăm următoarea relaţie cunoscută într'un triunghiu:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

care se mai poate scri:

$$b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=$$

$$(a+c)^2-4ac\cos^2\frac{B}{2}.$$

Această relaţie, ţinând seamă de (1), devine:

$$b^2=4b^2-4ac\cos^2\frac{B}{2},$$

sau:

$$3b^2=4ac\cos^2\frac{B}{2}.$$

Inlocuind aci pe a, b, c cu valorile lor scoase din (2) şi simplificând prin $4R^2$, obţinem:

$$3\sin^2 B=4\sin A\sin C\cos^2\frac{B}{2},$$

care se mai poate scri:

$$12\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}=4\sin A\sin C\cos^2\frac{B}{2},$$

sau:

$$3\sin^2\frac{B}{2}=\sin A\sin C.$$

Astfel şi a 2-a relaţie cerută este stabilită.

2°. Să arătăm că pentru $q=r$ (r, raza cercului înscris), triunghiul este dreptunghic. Considerăm relaţia cunoscută într'un triunghiu:

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{4}$$

în care avem:

$$p=\frac{b-r+b+b+r}{2}=\frac{3b}{2},$$

$$p-a=\frac{3b}{2}-(b-r)=\frac{b}{2}+r,$$

$$p-b=\frac{3b}{2}-b=\frac{b}{2},$$

$$p-c=\frac{3b}{2}-(b+r)=\frac{b}{2}-r.$$

Relaţia (4) devine înlocuind valorile găsite pentru p, $p-a$, $p-b$, $p-c$:

$$\frac{3br}{2}=\sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}+r\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-r\right)}=$$

$$\sqrt{\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4}-r^2\right)}.$$

Ridicând la patrat şi simplificând cu $\frac{3b^2}{4}$, obţinem:

$$3r^2=\frac{b^2}{4}-r^2,$$

de unde deducem:

$$r=\frac{b}{4}.$$

In acest caz laturile triunghiului sunt:

$$b-\frac{b}{4}=\frac{3b}{4},\quad b,\quad b+\frac{b}{4}=\frac{5b}{4}.$$

Cum aceste laturi satisfac relaţia lui *Pitagora* dintr'un triunghiu dreptunghic, căci avem evident:

$$\left(\frac{5b}{4}\right)^2=\left(\frac{3b}{4}\right)^2+b^2,$$

rezultă că triunghiul, în acest caz $q=r$, este dreptunghiu.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Colegiul Carol I, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila) şi *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu).

1416. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia.*

$$\prod(1-\cos A)=2r^2\sum\frac{\cos B\cos C}{bc}$$

IOAN B. POPA

Insemnând cu E_1 şi E_2 primul şi al 2-lea membru al relaţiei date şi folosind relaţiile cunoscute:

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2},$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, $\Sigma\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B=1$, putem scri succesiv:

$$(1)\quad E_1=8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=8\frac{r^2}{16R^2}=\frac{r^2}{2R^2}$$

$$(2)\qquad E_2=2r^2\sum\frac{\cos B\cos C}{4R^2\sin B\sin C}=$$

$$\frac{r^2}{2R^2}\sum\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C=\frac{r^2}{2R^2}.$$

Rezultă din (1) şi (2):

$$E_1=E_2,$$

astfel că relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cotescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Florescu L Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lăzărescu P. Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ţiţeica Ioan Ilie* (lic. Milit, N. Filipescu).

1417. — *Să se demonstreze că dacă* $N\neq 5m$, *atunci:*

$$4N^9-3N^5-N,$$

este divizibil prin 75.

G L GH. BUICLIU

Expresia dată, notată cu E, se poate scri:

$$E=N(4N^8-3N^4-1)=N(N^4-1)(4N^4+1),$$

sau:

$$E=(N-1)N(N+1)(N^2+1)(4N^4+1).$$

Numărul 75 descompus în factori primi, devine:

$$75=3\times 5^2.$$

Va trebui să arătăm ca E se divide prin 3 şi 5^2

Primii trei factori a lui E fiind numere consecutive, de sigur, unul este divizibil prin 3.

Rămâne a dovedi că E e divizibil şi prin 5^2, ştiind că $N \neq 5m$. In acest caz N nu poate fi de cât de formele:

(1) $\qquad N = \text{mult. } 5 \pm 1,$

(2) $\qquad N = \text{mult. } 5 \pm 2.$

Dacă N este de forma (1), atunci:

$$N^2 = \text{mult. } 5 + 1 \quad \text{şi} \quad N^4 = \text{mult. } 5 + 1,$$

astfel că:

$$(N^2 - 1)(4N^4 + 1) = \text{mult. } 5 \times$$
$$(\text{mult. } 5 + 4 + 1) = \text{mult. } 5^2.$$

Expresia E este deci, în acest caz, divizibilă şi prin 5^2.

Dacă N este de forma (2), atunci:

$$N^2 = \text{mult. } 5 + 4,$$
$$N^4 = \text{mult. } 5 + 16 = \text{mult. } 5 + 1,$$

astfel că:

$$(N^2 + 1)(4N^4 + 1) = (\text{mult. } 5 + 4 + 1) \times$$
$$(\text{mult. } 5 + 4 + 1) = \text{mult. } 5^2.$$

Expresia E este deci şi în acest caz, divizibilă prin 5^2, conţinând cei doi factori din primul membru.

In rezumat, oricare ar fi numărul întreg $N \neq 5m$, expresia E este divizibilă prin $3 \times 5^2 = 75$.

Observare. Expresia E se divide şi prin 150, căci având doi factori consecutivi, de sigur, unul este divizibil prin 2.

Soluţii date de d-nii: *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Grabovschi Eugen* (Orheiu), *Hermann Al. Victor* (student, Cluj), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Mocanu N. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Rosemberg I.* (lic. Roman),

1420. — *Să se rezolve următorul sistem:*

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{12} \\ xy + yz + zx = 26. \end{cases}$$

MIHAIL BOTEZ

Aducând la acelaşi numitor primul membru al ecuaţiei a 2-a şi ţinând seamă de a 3-a ecuaţie, putem scri:

$$\frac{yz + zx + xy}{xyz} = \frac{26}{xyz} = \frac{13}{12}.$$

De aci deducem:

$$xyz = 24.$$

Sistemul dat este astfel echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ xy + yz + zx = 26 \\ xyz = 24 \end{cases}$$

Aceste ecuaţii, scriind suma necunoscutelor x, y, z, suma produselor lor câte două şi produsul lor, urmează că x, y, z sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 3-lea:

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0,$$

care descompusă în factori devine:

$$(t - 2)(t - 3)(t - 4) = 0.$$

De aci urmează următoarele sisteme de soluţii pentru x, y, z:

x	2	2	3	3	4	4
y	3	4	2	4	2	3
z	4	3	4	2	3	2

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (lic. Chişinău), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Boborodea I. Ioan* (lic Milit, Tg-Mureş), *Boşoldea Gr. Grigore* (lic. Milit., Cernăuţi), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Cruţescu Trotus* (lic. Milit., Cernăuţi), *Curcă Gh. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Dălban Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Dobrin Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobriţescu D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Dulămiţă Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Dumitrescu Al. Virgiliu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Floareş I. Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Gheorghiu H. Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Grabovschi F. Eugen*, *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Ionescu D.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lazăr A.* (lic. Milit. N. Filipescu), *Marica I. Horia* (lic Cluj), *Marica Pompeiu Maşcaş Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei D-tru* (lic. (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Mişca C. Kivu* (lic. Focşani), *Moisovici Ştefan* (Colegiul Naţional, Craiova), *Murgu Marţian* (lic. Beiuş), *Muşcinschi*

Georges (lic. Milit., Chișinău), *Nedelcu V. Nicolae*, *Negrea A. Mircea* (Brăila) *Negulescu Ștefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Panait Mircea* (Șc. Ofițeri de Artilerie), *Pasere S. A. Emil* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Pambucdjian Kricor* (Constanța), *Petrescu-Craiovița Anastasie*, *Popa C. Benone* (lic. Milit., Cernăuți), *Rădulescu Octav*, *Rajka Z.* (lic. Orăștie) *Rauch L. Iosif* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Russu I. Eugen* (lic. Milit., Cernăuți), *Ștefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ștefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoica D-tru* (lic. Milit. Tg-Mureș), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Vieru M. Mircea-Dan* (lic. Milit., Cernăuți).

PROBLEME PROPUSE

1505. — Să se afle restul împărțirei prin 1000 a expresiei:

$$E = 243 \times (3^{12p+1}) + 3^{8p+5} + 3^{4p+3} + 1000$$

ION MARGINEANU

1506. — Intr'un triunghiu A B C, în care B D este înălțimea dusă din B, A E este mediana corespunzătoare laturei B C, iar C P bisectoarea unghiului C, avem:

$1_0.$ $\quad \overline{BP} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{OD} = 2\,\overline{AP} \cdot \overline{OE} \cdot \overline{DC}$

$2^0.$ $\quad \overline{AC} = \dfrac{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AD} - \overline{DC}},$

O fiind punctul de intersecție a lui D E cu C P.

I. V COJOCARU

1507. — Se consideră patrulaterul oarecare A B C D. Fie M și P mijloacele laturilor opuse A B și D C. Se unește D cu M, B cu P, C cu M și A cu P.

Pe dreptele D M, P B, C M și P A se consideră punctele C_1, A_1, D_1 și B_1 astfel ca:

$$\overline{MC} \cdot \overline{MC_1} = \overline{MD} \cdot \overline{MD_1},\ \overline{PA} \cdot \overline{PA_1} = \overline{PB} \cdot \overline{PB_1},$$

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{MD_1}}{\overline{PB'}} = 3.$$

Să se arate că:

$$\text{aria}\,(A\,B\,C\,D) = 9\ \text{aria}\,(A_1\,B_1\,C_1\,D_1)$$

M. WEBER

1508. — Să se rezolve ecuația:

$$(a - x^2)^2 = a - x$$

ION C SCHILERU-DILI

1509. — Să se stabilească identitatea:

$$u^2 + v^2 + w^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2,$$

știind că:

$$u = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\beta + 2\,\gamma)$$

$$v = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\alpha + \gamma)$$

$$w = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(2\,\alpha - \beta)$$

$$u_1 = -\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\beta + 2\,\gamma) + 2\,\alpha\,(\beta + \gamma)$$

$$v_1 = \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\alpha + \gamma) + 2\,\beta\,(\alpha - \gamma)$$

$$w_1 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\,\delta\,(2\,\alpha - \beta) + 2\,\gamma\,(\alpha - \beta)$$

A GLODEN

1510. — Ecuația:

$$x^3 + p\,x + q = 0,$$

admițând ca rădăcini tg a, tg b, tg c, să se formeze ecuația algebrică cu rădăcinele:

$$\sin 2\,a, \qquad \sin 2\,b, \qquad \sin 2\,c$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

1511. — Să se formeze ecuația algebrică ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{\cos\dfrac{k\pi}{p} + 2\sin\dfrac{k\pi}{p}}{2\cos\dfrac{k\pi}{p} - \sin\dfrac{k\pi}{p}},$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, p-1),$$

unde p este un întreg pozitiv.

V. ALACI

1512. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:

$$\sum \frac{(a+b)^2}{r_a\,r_b} = 4\left(\frac{R}{r} + 2\right)$$

M. C. POSTELNICESCU

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1936.

Costul *special* a unui abonament fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Abonamentul pe anul XVI-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 SEPTEMBRIE 1936 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N. N. MIHAILEANU: CATEVA PROPRIETATI CORELATIVE RELATIV LA CERCURILE EXINSCRISE.
3. NOTE MATEMATICE: 12, 13, 14.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 109, 154, 646, 1305, 1418, 1421, 1424, 1425, 1429.
6. PROBLEME PROPUSE: 1513-1520
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Abonamentul pe anul XVI-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI – No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

CÂTEVA PROPRIETĂȚI CORELATIVE RELATIV LA CERCURILE EXINSCRISE

DE
N. N. MIHAILEANU

Vom expune, în cele ce urmează, câteva proprietăți ale cercurilor exînscrise. Aceste proprietăți, deși disparate, au totuși un punct comun, modul lor de generare, pornind dela proprietăți analoage ale cercului înscris. In adevăr, orice proprietate în legătură cu cercul înscris, admite o transformată corelativă pentru cercurile exînscrise.

Se știe astfel *(Feuerbach)* că cercul *Euler* fiind tangent cercului înscris, cele exînscrise se bucură de aceeaș proprietate. Aceasta, ca exemplu tipic. Uneori proprietatea cercului înscris poate fi susceptibilă de transformări corelative multiple; astfel punctului (I) *Gergonne*, îi corespund odată punctele adjuncte I_a, I_b, I_c pentru fiecare cerc exînscris, apoi punctul reciproc (ν) *Nagel*, păstrând din fiecare cerc exînscris, numai elementele corespunzătoare vârfului respectiv; în plus lui (ν) îi corespund punctele adjuncte (ν_a), (ν_b), (ν_c), reciproce punctelor I_i și anticomplimentare centrelor I_a, I_b, I_c, ale cercurilor exînscrise.

In cele ce urmează, vom stabili și alte proprietăți de aceeaș natură. Vom indica întâi proprietatea care le-a sugerat și apoi proprietatea corelativă.

1°. Se poate construi o infinitate de triunghiuri, având același cerc înscris și același punct I. [Exercices de Géométrie par F. G. M., 7e éd. §§ 293$_i$ sau 1546$_j$.]

1′. Se poate construi o infinitate de triunghiuri, având același cerc exînscris I_a și același punct I_a. [Analog pentru celelalte cercuri exînscrise; vom considera însă, în toate cazurile, simetria în jurul lui A].

Prin I_a ducem o dreaptă arbitrară, care taie cercul I_a în D, E. Tangentele în aceste puncte la cercul I_a, se taie în T. Trebue să ducem acum dreapta $T B_a C_a$, care să taie pe DE în conjugatul armonic al lui D față de A, I_a. (A fiind intersecția tangentelor în B_a, C_a la cercul I_a.) Construcția nu diferă de cea dată proprietății generatoare. [l. c.]

2°. Perpendicularele duse pe bisectoarele interioare AI, BI, CI ale unui triunghiu ABC, în punctul lor comun I, taie laturile triunghiului în B_1, C_1 cea de pe AI, în C_2, A_2 cea pe BI, în A_3, B_3 cea de pe CI. Dacă P_1, P_2, P_3 sunt punctele comune dreptelor $(B B_3, C C_2)$, $(C C_1, A A_3)$, $(A A_2, B B_1)$, atunci dreptele $A P_1$, $B P_2$, $C P_3$ sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului ABC. [Culegerea de Probleme de Geometrie a D-lui Profesor *Gh. Țițeica*, 23II.]

2′. Perpendicularele duse pe bisectoarea interioară $A I_a$ și exterioară $B I_a$, $C I_a$ în punctul lor comun I_a, taie laturile triunghiului, respectiv în punctele B_a, C_a pe BC; C_{1b}, A_{1b} pe AC și B_{1c}, A_{1c} pe AB. Fie încă A_b, C_b și B_c, A_c puncte analoage pentru B_a, C_a etc. Perechile de drepte $(B C_{1b}, C B_{1c})$, $(A B_a, B A_{1b})$, $(C A_{1c}, A C_a)$ concură în P_{1a}, P_{1b}, P_{1c}. La fel se înțeleg punctele P_{2b}, P_{2c}, P_{2a} și P_{3c}, P_{3a}, P_{3b}. Punctele A, P_{1a}, P_{2a}, P_{3a}; B, P_{1b}, P_{2b}, P_{3b}; C, P_{1c}, P_{2c}, P_{3c} sunt respectiv coliniare și cevienele pe care le determină, concură în centrul de greutate al triunghiului.

Din triunghiurile isoscele $A A_{1b} A_{1c}$, $B B_a B_{1c}$, $C C_a C_{1b}$ avem $I_a A_{1b} = I_a A_{1c}$, $I_a B_a = I_a B_{1c}$, $I_a C_a = I_a C_{1b}$ și deci $B_{1c} C_{1b} \| B C$ și P_{1a} se află pe mediana AG. Analog $C_a A_{1c} \| A_{1b} C_{1b}$ (sau AC), deci $A C_a$, $C A_{1c}$ concură pe mediana BG, etc.

3°. Fie A′, B′, C′ intersecțiile bisectoarelor interioare ale unghiurilor triunghiului ABC cu cer-

cul circumscri, A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor AA', BB', CC'. Centrul cercului $A_1B_1C_1$ este mijlocul dreptei OI, care uneşte centrul cercului înscris. [G. M. pr. 3285: *Max Bernstein*].

3'. Fie A', B'_a, C'_a intersecţia bisectoarei interioare a unghiului A şi exterioare ale unghiurilor B şi C cu cercul circumscris, iar A_1, B_{1a}, C_{1a} mijloacele distanţelor AA', BB'_a, CC'_a. Punctele O, A_1, B_{1a}, C_{1a}, I_a sunt conciclice în cercul de diametru OI_a.

OA_1 este perpendiculară pe coarda AA', împărţind-o în două părţi egale. Analog:

$$\sphericalangle OA_1I_a = \sphericalangle OB_{1a}I_a = \sphericalangle OC_{1a}I_a = 90^0.$$

4°. Fie A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 intersecţiile laturilor unui triunghiu cu un cerc concentric cu cercul înscris I şi de rază mai mare. Coardele A_2B_1, A_1C_2, C_1B_2 formează triunghiul $A_3B_3C_3$. Cercurile circumscrise triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ sunt tangente laturilor triunghiului dat ABC. [G. M., vol. XXX, pag. 241, Articolul: „Proprietăţi importante ale triunghiului": *Ing. N. Blaha*].

4'. Un cerc concentric cu cercul exînscris relativ la A, taie laturile AB, AC în B_a, C_a şi pe BC în B_c, C_b [B_a, C_a intersecţiile mai apropiate de A]. Dreptele B_aC_b şi C_aB_c se taie în A_1. Cercul $(B_aA_1C_a)$ este tangent laturilor AB şi AC.

Fie A_b, A_c intersecţia cercului considerat cu prelungirile AB, AC; $BC_b = BB_a$ şi $BA_b = BB_c$, deci $C_bB_a \parallel A_bB_c$ şi $\sphericalangle AB_aA_1 = \sphericalangle B_aA_bB_c = 180^0 - \sphericalangle B_aC_aB_c = \sphericalangle B_aC_aA_1$ şi analog $\sphericalangle AC_aA_1 = \sphericalangle C_aA_cC_b = 180^0 - \sphericalangle C_bB_aC_a = \sphericalangle A_1B_aC_a$.

5°. Se consideră două cercuri de centre O, I şi raze R, r. Dacă avem relaţia (*Euler*): $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$, atunci există o infinitate de triunghiuri înscrise în cercul (O, R) şi circumscrise cercului (I, r). [C. d. P. 85 IX].

5'. Dacă între cercurile de centre O, I_a şi raze R, r_a există relaţia: $\overline{OI_a}^2 = R^2 + 2Rr_a$, există o infinitate de triunghiuri înscrise în O şi excircumscrise lui I_a.

Se urmăreşte de aproape, soluţia dată în C. d. P. [Se ia A arbitrar pe cercul O, se duc tangentele AM, AN la (I'_a), care taie cercul O în B şi C: fie A_1 diametral opus lui A şi B', C' intersecţiile BI_a, CI_a cu cercul (O). $\Delta(MI_aB) \sim \Delta(AA_1B')$, sau $BI_a \cdot B'A = 2Rr_a$; dar $BI_a \cdot B'I_a = \overline{OI_a}^2 - R^2 = 2Rr_a$, deci $B'A = B'I_a$ şi analog $C'A = C'I_a$: $AB'I_aC'$ este romb, deci $\sphericalangle MBI_a = \sphericalangle B'C'A = \sphericalangle B'C'I_a =$ (sau suplimentar) $\sphericalangle B'C'C = (s.s) \sphericalangle B'BC = \sphericalangle CBI_a$ şi BC este tangentă la (I_a)]

6°. Se dă un triunghiu ABC. Fie O centrul cercului circumscris, I al cercului înscris, care atinge latura BC în α. Dreptele AO şi AI taie cercul circumscris respectiv în A' şi A''. Să se demonstreze că dreptele $A'I$, $A''\alpha$ se întâlnesc pe cercul circumscris. [C. d. P. 87 IX]

6'. Fie α' contactul laturei BC cu cercul exînscris I_a şi fie A''_1 intersecţia AI_a cu cercul circumscris; celelalte notaţii anterioare. Dreptele $A'I_a$, $A''_1\alpha'$ se taie pe cercul circumscris.

$\sphericalangle AI_a\alpha' = \sphericalangle I_aAA'$ (ca având complimente egale) şi $AI_a \cdot A''_1I_a = \overline{OI}^2 - R^2 = 2Rr_a = AA' \cdot I_a\alpha'$, deci $\Delta(AI_a\alpha') \sim \Delta(A''_1I_a\alpha')$ şi $\sphericalangle AA''_1\alpha' = 180^0 - \sphericalangle AA'I_a$.

7°. Fie A', B', C' picioarele cevienelor unui punct P în raport cu triunghiul ABC. Tangentele diferite de laturi, duse prin A', B', C' la cercul înscris, îl întâlnesc în α, β, γ. Cevienele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt concurente. [C. d. P. 16 XII.]

7'. Tangentele duse în acelaş mod la cercul exînscris I_a îl întâlnesc în $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Cevienele $A\alpha_1$, $B\beta_1$ $C\gamma_1$ sunt concurente.

7''. Dacă se duc tangente la cercurile exînscrise I_b, I_c se obţin respectiv punctele $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ şi $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Cevienele $A\alpha_1$, $B\beta_2$, $C\gamma_3$ sunt concurente.

7'''. Cu notaţiile anterioare, cevienele ($A\alpha$, $B\beta_3$, $C\gamma_2$) sunt de asemenea concurente.

Fie D_1 contactul cercului (I_a) cu BC; $A\alpha_1$ taie pe BC în D'_1 şi $A'\alpha_1$ taie pe AC, AB în B'_1, C'_1 Considerăm o tangentă arbitrară la cercul (I_a), care taie tangentele fixe AC, AB, BC, $A'\alpha_1$ în a_1, b_1, c_1, α_1, determinând un raport anarmonic constant, când tangenta coincide cu BC sau $A'\alpha_1$, $(b_1c_1a_1\alpha'_1) = (CBD_1A') = (B'_1C'_1A'\alpha_1)$. Dar $(B'_1C'_1A'\alpha_1) = (CBA'D'_1)$, deci $(CBD_1A') = (CBA'D'_1)$, sau:

$$\frac{D_1B}{D_1C}\cdot\frac{D_1'B}{D_1'C}=\left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2.$$

Analog, dacă notăm E_1, F_1 tangenţa laturilor AC, AB cu (I_a) şi E_1', F_1' picioarele cevienelor $B\beta_1$, $C\gamma_1$ pe aceleaşi laturi:

$$\frac{E_1C}{E_1A}\cdot\frac{E_1'C}{E_1'A}=\left(\frac{B'C}{B'A}\right)^2,\quad \frac{F_1A}{F_1B}\cdot\frac{F_1'A}{F_1'B}=\left(\frac{C'A}{C'B}\right)^2,$$

etc. etc.

8°. Fie I şi O centrele cercului înscris şi circumscris unui triunghiu ABC. Din picioarele bisectoarelor triunghiului ABC, se duc tangente la cercul I, ale căror puncte de tangenţă sunt A', B', C', Să se demonstreze că dreptele AA'_1 BB', CC' se întâlnesc într'un punct pe IO. [R. M. T. pr. 343: *Col. Gh. Buicliu.*]

8'. Fie O, I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor circumscrise şi tritangente triunghiului ABC Din picioarele A_1, B_1, C_1 ale bisectoarelor triunghiului ABC, se duc tangente la cercurile exînscrise corespunzătoare, ale căror puncte de contact A', B', C' determină trei transversale unghiulare, concurente pe dreapta OI.

Fie încă α, β, γ contactele cercurilor exînscrise pe laturi — şi nu pe prelungiri. — De pe o figură, ne încredinţăm imediat că $\sphericalangle A_1AA=\sphericalangle A_1AA'$ şi deci cevienele AA', BB', CC' concură în izogonalul punctului lui *Nagel* al triunghiului, care se află pe IO.

9°. Pe laturile BA, CA ale unui triunghiu ABC, se iau lungimile BD = CE = BC. Să se demonstreze că dreapta, care uneşte centrele O, I ale cercului circumscris şi înscris în triunghiu, este perpendiculară pe dreapta DE şi egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului ADE. Care e proprietatea analoagă a cercurilor exînscrise? [Rouché & de Comberousse Géom. pl. nouvelle éd. Question, prop. 29, pag. 506.]

9'. Pe prelungirile laturilor BA, CA ale unui triunghiu ABC, se iau respectiv lungimile $BD_1=BC+CA-AB$ şi $CE_1=BC+AB-CA$; dreapta OI_a este perpendiculară pe dreapta D_1E_1 şi egală cu diametrul cercului circumscris în triunghiul AD_1E_1.

A se vedea pentru demonstraţie, teorema mai generală: *R. Goormaghtigh*, citată în G. M, vol. XXXVI, p. 361.

10°. Fie D piciorul bisectoarei unghiului A, al triunghiului ABC şi DQ tangenta la cercul (I) înscris. Dreapta, care uneşte mijlocul A' al laturei BC cu Q, se întâlneşte cu celelalte două, analog obţinute, în punctul (φ) *Feuerbach* [G. M., pr. 2748: *Col. Gh. Buicliu*].

10'. Notaţiile anterioare şi fie DT tangenta la cercul exînscris I_a. Dreapta A'T şi celelalte analoage, trec respectiv prin punctele *Feuerbach* φ_a, φ_b, φ_c.

TQ este anteparalelă relativ la A, deci $\perp AO \| O_9A'$, deci $I_aT \| O_9A'$ şi A'T trece prin centrul φ_a, interior de similitudine al cercurilor I_a, O_9, exînscris şi al celor nouă puncte.

*
* *

Din cele câteva exemple tratate, se poate observa, cum studiind cu atenţie proprietăţile cercului înscris, se pot extinde rezultatele.

NOTE MATEMATICE

12. — *Sur l'équation diophantienne* $x^3+y^3=u^3+v^3$ *(en nombres entiers).*

A. Nous donnerons une solution entière à trois paramètres arbitraires; posons $Q=n^2+np+p^2$, on a:

$$\begin{cases} x=3m(3m^3-Qn)\\ y=3m(Qp-3m^3)\\ u=9m^3p-Q^2\\ v=Q^2-9m^3n \end{cases}$$

Exemples:

m	n	p	
1	1	2	$31^3+33^3=12^3+40^3$ (= 65.728)
1	2	3	$\overline{105}^3+\overline{343}^3=\overline{162}^3+\overline{334}^3$ (= 41.511.232)
3	2	1	$\overline{437}^3+\overline{603}^3=\overline{194}^3+\overline{666}^3$ (= 302.709.680)

etc.

B. Si a, b, c, d représente une solution entière de l'équation $x^3+y^3=u^3+v^3$, proposons-nous

d'en trouver une autre (les nombres étant supposés *positifs* ou *négatifs*) de la forme :

$$(a+t)^3+(b+t)^3=(c+t)^3+(d+t)^3.$$

On trouve :

$$t=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{a+b-c-d}\cdot$$

Si l'on a donc $a^3+b^3=c^3+d^3$, on aura aussi.

$$[a(a+b-c-d)+c^2+d^2-a^2-b^2]^3+$$
$$[b(a+b-c-d)+c^2+d^2-a^2-b^2]^3=$$
$$[c(a+b-c-d)+c^2+d^2-a^2-b^2]^3+$$
$$[d(a+b-c-d)+c^2+d^2-a^2-b^2]^3.$$

On pourra diviser les deux expressions :

$$(a+b-c-d) \quad \text{et} \quad (c^2+d^2-a^2-b^2)$$

par leur plus grand commun diviseur.

Exemple. Partons de l'identité :

$$31^3+33^3=12^3+40^3$$

$$t=\frac{1600+144-(961+1089)}{31+33-(40+12)}=-\frac{306}{12}=-\frac{51}{2},$$

nous aurons la nouvelle identité :

$$(31.2-51)^3+(33.2-51)^3=(12\,2-51)^3+(40.2-51)^3$$
$$11^3+15^3=-27^3+29^3$$

ou :

$$\boxed{29^3=11^3+15^3+27^3}$$

etc.

A. GLODEN
(Luxembourg)

13. — *Solution générale en nombres entiers de l'équation :*

$$x^4+y^4+z^4=x'^2+y'^2+z'^2,$$

avec les conditions :

$$x=y+z \qquad \text{et} \qquad x'=y'+z'.$$

$$\begin{cases} x=3u^2-v^2+2uv \\ y=3u^2-v^2-2uv \\ z=4uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=9u^4+v^4-18u^2v^2+12u^3v-4uv^3 \\ y'=9u^4+v^4-18u^2v^2-12u^3v+4uv^3 \\ z'=8uv(3u^2-v^2) \end{cases}$$

En employant les fonctions :

$$U=3u^2-v^2$$
$$V=9v^4+v^4-18u^2v^2,$$

on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} x=U+2uv \\ y=U-2uv \\ z=4uv \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=V+4uvU \\ y'=V-4uvU \\ z'=8uvU \end{cases}$$

Exemples numériques :

$$3^4+5^4+8^4=16^2+39^2+55^2$$
$$7^4+8^4+15^4=15^2+161^2+176^2$$
$$5^4+16^4+21^4=185^2+231^2+416^2$$
$$16^4+39^4+55^4=1265^2+2769^2+1504^2$$
$$(=11.529.602).$$

A. GLODEN
(Luxembourg)

13. — *Numere interesante cu cifre diferite.*

D-l *V. Thébault* a propus şi a rezolvat în revista *„Mathesis“* din ultimii ani, numeroase chestiuni asupra numerilor, care se scriu cu 9 sau cu 10 cifre diferite. Chiar şi în revistele noastre, atât în *„Gazeta Matematică“* cât şi în *„Revista Matematică“ din Timişoara,* a dat numeroase particularităţi de ale numerilor formate cu cifre diferite.

Mă voi ocupa în cele ce urmează de problema d-sale 2875 propusă în *„Mathesis“*, Vol. XLVIII, pag. 462 şi căreia nu i s-a publicat încă soluţia până la data la care scriu această notă.

Enunţul problemei citate este :

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate câte o singură dată, să se formeze un număr, care divizat prin 3, 6 sau 9, să dea un cât format din cele opt cifre diferite de 3, 6 sau 9.

Cu alte cuvinte dacă N_i este un număr format din cele 9 cifre semnificative, iar P_i un număr format din 8 cifre semnificative în afară de i, numerile d-lui *V. Thébault* sunt :

$$N_1=3\times P_3, \qquad N_2=6\times P_6, \qquad N_9=9\times P_9.$$

De exemplu :

$$138527946 = 3 \times 46175982,$$

$$289574613 = 3 \times 96524871,$$

$$259631748 = 6 \times 43271958,$$

$$429173658 = 6 \times 71528943,$$

$$329146578 = 9 \times 36571842,$$

$$785926314 = 9 \times 87325146.$$

Problema d-lui *V. Thébault* are multe soluţiuni, după cum se va vedea în notele următoare.

Ne-am propus să dăm în această revistă numerile N de 9 cifre semnificative diferite între ele, care verifică relaţiunea:

$$N = p \times N_p,$$

în care p este o cifră $\neq 1$, iar N_p un număr de 8 cifre, care conţine toate cifrele afară de cifra p.

Paralel vom da în „*Gazeta Matematică*“ soluţiile aceleiaşi probleme pentru cazul când N este scris cu cele 10 cifre ale sistemului zecimal, iar N_p este format din 9 cifre, afară de p, care este diferită de 0 şi 1.

Pentru această notă considerăm $p = 2$.

In condiţiunile problemei 2875 citate, relaţiunea:

$$N = 2 \times N_2$$

nu are nici o soluţiune.

In adevăr N_2 nu se poate termina cu 5, căci atunci $2 \times N_2$ s-ar termina cu 0. Deci 5 ar putea ocupa un rang oarecare i în N_2. Fie:

$$N_2 = a..5\,b\,c\ldots$$

Prin înmulţirea cu 2, din produsul $2 \times b + \varepsilon$ poate rămâne restul parţial 0 sau 1. Dacă acest rest este 0, atunci 2×5 dă la produs 0 şi N, ar conţine pe 0, ceia-ce nu se poate. Dacă restul e 1, atunci cifra de rang i a lui N va fi 1, dat tot 1 va fi şi prima cifra rezultată din $2 \times a + \varepsilon$, căci $2 \times 9 + \varepsilon < 20$.

Deci:

$$N = 2 \times N_2$$

nu are soluţiuni.

Urmare în numerele viitoare.

G-L GH. BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 11, Iulie 1936. André-Marie Ampère (1775—1836), (urmare), de *Ion Ionescu*. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol (urmare), de *D. Barbelian*. Generalizarea formulelor trigonometrice dintr'un triunghiu în domeniul complex, de *Gh. Th. Gheorghiu*.

2. Idem, No. 12, August 1936. André-Marie Ampère (1775—1836), (urmare şi sfârşit), de *Ion Ionescu*. Asupra unor însumări, de *I. V. Mătieş*. O propoziţie despre punctul *Miquel*, de *N. N. Mihăileanu*. Asupra curbelor plane, de *Tiberiu Popoviciu*.

3. *V. Cristescu. Culegere de Probleme de Trigonometrie*, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu*, doctor în matematici, cu o prefaţă de *Ion Ionescu*, Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică.

In credinţa că această *Culegere* va fi de un real folos corespondenţilor nostrii, o recomandăm cu toată căldura. (Preţul lei 95.)

Iată câte-va rânduri din prefaţa d-lui *Ion Ionescu*:

„Culegerea este astfel sistematizată, conform cerinţelor actuale în ştiinţele tecnice. Ea poate fi folosită de licienii care vor să ştie carte şi care nu se mulţumesc numai a trece clasa; de studenţi, de elevi ingineri şi ofiţeri de arme speciale, pentru care matematicele sunt unelte de cercetare preţioase. In ea se poate găsi totul, fără a mai fi nevoie de consultat Culegeri străine. Pot afirma că nu sunt multe cărţi în care metoda de jalonare a răspunsurilor şi soluţiunilor să fie dată ca în Culegerile din Biblioteca Gazetei Matematice“.

4. *Boletin Matematico*, anul IX, No. 4, Iunie 1936, Buenos Aires. Studiul unor tipuri de ecuaţii de congruenţe, de *M. O. Gonzales*.

Funcţia: $y = A\,|x - a|^0 + B\,|x - b|^0 + \cdots + L\,|x - l|^0$ şi alte funcţiuni analoage, de *B. I. Baidaff*. Note: Unele identităţi numerice, de *A. Gloden*. Asupra integrării de anumite tipuri de diferenţiale binoame, de *J. Gonzalez Perera*.

5. *Revista Cercului de studii al Şcoalei Superioare P. T. T.*, anul V, N-rile 6, 7, 8.

6. *Philosophie des Mathématiques (VI)*. Actes du Congrès international de Philosophie Scientifique, Sorbonne, Paris 1935. La logique en tant que physique de l'objet quelconque, par *F. Gonseth*. Mathématiques et réalité, par *Albert Lautman*. L'axiomatique et la théorie des groupes, par *Gustave Juvet*. Quelques aspects de l'étude des propositions mathématiques, par *George Bouligand*. Role des Espaces abstraits en logique, stabilité des propositions, légalité et semi-légalité, par *Jean-Louis Destouches*. L'infini mathématique et l'évolution de la logique, par *Basilio Mania*. Recherches sur le système de la logique intuitioniste, par *Stanislaw Jaskowski*. La négation et le principe du tiers exclu, par *Arnold Reymond*. Bestreitet Aristoteles die Gültigkeit des „Tertium non datur“ für Zukunftsaussagen? von *A. Becker*. Leibniz et le principe du tiers exclu, par *Paul Schrecker*.

7. *Bulletin de Mathématique et de Physique, pure et appliqées, de L'école Polytechnique Roi Carol II*, Bucarest, Année VI-ième (1934—1935), No. 1, 2, 3; Fasc. 16, 17, 18.

Le corps didactique de L'école Polytechnique *Roi Carol II*, dédie ce volume, au professeur *Ion Ionescu*, Ingénieur Inspecteur Général, à l'occasion de l'aniversaire de

ses 40 années d'activité technique et didactique en témoignage d'affectueuse gratitude.

Modifications produites dans le mouvement d'un système, par l'introduction brusque de nouvelle liaisons, par *A. G. Ioachimesco.* Une identité entre nombres complexes et un théorème élémentaire, par *D. Pompeiu.* Sur quelques propriétés affines, par *G. Tzizeica.* Le travail des forces électrostatiques; tension et répulsion des lignes de force, par *Vasilesco Karpen.* Calcul des cadres, par *Gh. Filipesco.* Sur l'attraction d'un électroaimant, par *D. Germani.* Sur la dépolymérisation de l'eau par capillarité, par *Er. Ioporesco.* Explosions produites par le Sélénium, par *B. Bianu.* Le problème général de la répartition des courants dans la marche en parallèle des transformateurs, par *I. S. Gheorghiu.* Sur le diamètre économique d'une conduite de refoulement, par *Henri Theodoru.* Note sur l'approximation des systèmes statiquement indéterminés, par *Aurel Beleş* Équilibreurs aux extrémités des circuits interurbains, par *I. Constantinesco.* La calcul avec les quantités complexes en Géométrie et en Electricité, par *Ernest Abason* L'influence de la viscosité du milieu sur la fermentation alcoolique par *Matei Niculesco.* Profils longitudinaux d'égale visibilité dans la construction des salles de spectacle, par *Cristea Mateesco.* Sur le mécanisme de l'addition des hydrocarbures aromatiques aux doubles liaisons éthyléniques en présence du chrorure d'aluminium, par *M. Costin, D. Nenitzesco, Ion Gavăt* et *Grigore Vântu.* Sur le dégré d'encastrement des poutres, par *D. Hangan.* Une propriété caractéristique du paraboloïde de rotation, par *Nicolas Ciorănesco.* Considération sur la technique du ciment et du beton chez les Romains. Etude du beton du point de *Trajan* sur le Danube, par *Serban C. Solacolu.* Sur l'obtention du nitrobenzène à partir de l'essence, par *V. Th. Cerchez.* Sur la réaction en basse fréquence dans les lampes triodes, par *Matei Marinesco.* La circulation à grande vitesse dans les courbes de raccordement paraboliques, aux cas où l'un des rails est surhaussé et l'autre abaissé. par *Ion Gr Stratilesco.* Sur un théorème de géométrie plane élémentaire, par *Al. Gutzu.* Modellversuche an einem Heber, von *Dorin Pavel.* Lignes de champ magnétique autour d'une ramification de courants, par *Sabba Stefanesco.* Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer Koordinaten, von *Gh. Gh. Vasiliu.* Sur les triangles trihomologiques et triosthologiques, par *G. D. Simionesco.*

8. *Bulletin Stientifique de L'école Polytechnique de Timişoara,* tome 6, fasc. 3—4, 1936. Les équations analytiques de différentes configurations discontinues ou continues, par *V. Alaci.* Une classe de courbes gauches, par *Alexandru V. Niculescu.* Fonctions métasphériques d'une seule variable, (suite), par *Gh. Th. Gheorghiu.* Beitrag zur Frage des Wärmeüberganges in der Ansaugeperiode bei Verbrennungsmotoren mit hängenden Ventilen insbesondere bei Flug- und Kraftfahrzeug-Motoren, von *Adrian Stambuleanu* Die thermische Spaltung von Benzin und Heizöl (Păcură) unter Berücksichtigung der Aethylen-Bildung, von Dr. Ing. *C. Cândea* und *C. Manughevici.* Einfluss der hohen Temperaturen auf Krackgase, erhalten durch thermische Spaltung von rumänischem Petroleum (Moreni), von *C. Cândea* und *E. Macowski.* Determinarea pierderilor de sarcină într'un cot circular la 90° cu diametrul de 250 mm., de Prof. Ing. *Pompiliu Nicolau.*

9. *V. Thébault.* Sur une nouvelle sphère associée au tétraèdre. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome LVI. série A, p. 70)

10. *Gh. Th. Gheorghiu.* Sur les coefficients de la factorielle et sur deux classes de polynomes harmoniques. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, Tome XXXVIII, 1936).

11. *Gh. Th. Gheorghiu.* Generalizarea formulelor trigonometrice dintr'un triunghiu în domeniu complex. (Extras din „Gazeta Matematică", No. 11, anul XLI, 1936.)

12. *Teofil Veşcan.* Axiomatica numerilor întregi (Societatea licenţiaţilor în matematici dela Universitatea din Cluj, litografiat.)

13. *Alexandru V. Niculescu.* Courbes sphériques de *M. G. Tzitzeica.* (Extras din Mathematica, vol. XII.)

14. *Alexandru V. Niculescu.* Une classe de courbes gauches. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara, Tome 6, Fasc. 3 – 4.)

PROBLEME REZOLVATE

109. — *Se împarte un cerc în n părţi egale, iar în fiecare punct de diviziune, se aplică respectiv forţele* $F \times i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, *care fac cu tangenta la cerc, în acel punct, respectiv unghiul* $\left(\frac{360^0}{i}\right)$. *Se cere direcţia şi intensitatea rezultantei.*

L-T I LINTES

$n = 1$. Cazul este simplu, intensitatea este F, forţa fiind tangentă la cerc.

$n = 2$. Forţele sunt paralele şi de sens opus, aplicate la extremităţile unui diametru. Intensitatea forţelor este F şi $2F$, iar rezultanta, paralelă, are intensitatea F şi este aplicată la o treime din diametru dela forţa $2F$.

$n = 3$. Forţele sunt aplicate în vârfurile unui triunghiu echilateral şi sunt paralele cu două laturi. Proectând pe o paralelă la cealaltă latură, avem o rezultantă nulă. Proectând pe o perpendiculară, găsim rezultanta:

$$R = 2F \cdot \cos 30^0 = F \cdot \sqrt{3}.$$

Momentul în raport de centrul cercului circumscris triunghiului este:

$$F \cdot r + 2F \cdot r + 3F \cdot \frac{r}{2} = \frac{9}{2} \cdot F \cdot r$$

şi este aplicat la distanţa:

$$F \cdot x \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2} \cdot F \cdot r,$$

adică:

$$x = \frac{9}{2\sqrt{3}} \cdot r,$$

r fiind raza cercului.

Sensul fiind trigonometric.

$n = 4$. In mod analog găsim:

$$R = F \cdot \sqrt{53 + 6 \cdot \sqrt{3}}$$

$$x = \frac{r}{2\sqrt{53 + 6 \cdot \sqrt{3}}}$$

semnul momentului fiind negativ.

$n = 5$. Analog găsim:

$$R = \left(25 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right) \cdot F,$$

deci:

$$x = -\frac{2r}{25 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}.$$

$n = 6$. Se deduce că:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

unde:

$$X = -\frac{5}{8} F \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{3(10 + 2\sqrt{5})} - 1\right)$$

$$Y = 4 \cdot F(\sqrt{3} - 1) - \frac{5}{8} F\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

și:

$$x = \frac{F}{R} \cdot r \cdot \frac{5(\sqrt{5} - 1) + 8}{4}.$$

In acest mod problema poate să fie extinsă la orice valori ale lui n.

Nu știu dacă o soluție generală, oricari ar fi n, este posibilă?

154. — *Intr-o fabrică de zahăr se utilizează ca combustibil gazul natural. Considerându-l format numai din metan și ținând seamă de următoarele date:*

— *Puterea calorifică a metanului pe kgr. este 13318 c.*

— *Căldura latentă de vaporizare a apei este 537 c.*

— *Volumul vaporilor de apă e de 1650 ori mai mare ca al lichidului din care au provenit.*

— *Greutățile atomice:*

$C = 12$; $H = 1$; $O = 17$; $N = 14$.

— *Aerul e format din* $N + O$ *în proporția gravimetrică* $N = 77\%$; $O = 23\%$.

Să se determine:

1°. *Densitatea metanului la* 15°C. *și la* 760 $^m/_m$.

2°. *Cantitatea de metan socotită în* m^3 *la* 15° *și* 760 $^m/_m$, *necesară arderii, ca să se obțină prin fierbere în cazane* 100 m^3 *vapori de apă, știind că temperatura inițială a apei este de* 15° C., *iar randamentul de utilizare a căldurii de ardere la evaporare este* 0,8.

3°. *Cantitatea de aer în kgr. necesară întreținerii arderei întregei cantități de metan.*

C. STEFANESCU

Soluție. 1°. Știind că metanul este:

$$CH_4$$

și că greutățile moleculare ale C și H sunt respectiv 12 și 1, rezultă că o moleculă de metan are greutatea moleculară 16, cum volumul molecular al metanului este 22,4 litri, rezultă că greutatea a 1000 litri sau a unui m^3 metan la 0° și 760 $^m/_m$ va fi:

$$x = \frac{1000 \times 16}{22{,}4} = 714 \text{ gr.}$$

Densitatea metanului se calculează din:

$$D = \frac{g}{G},$$

g și G fiind respectiv greutatea 1 m^3 metan și 1 m^3 aer.

Inlocuind pe g și G prin valorile lor:

$$D = \frac{714}{1293} = 0{,}552.$$

Densitatea metanului la 0° *și* 760 $^m/_m$ *este deci* 0,552.

Dacă D_t, V_t sunt densități și volume la t, atunci:

$$\frac{D_0}{D_{15}} = \frac{V_{15}}{V_0} \qquad ** \qquad D_{15} = \frac{D_0}{V_{15}},$$

căci $V_0 = 1$. Dar:

$$V_{15} = V_0(1 + \alpha t) = V_0\left(1 + \frac{1}{273} \cdot t\right)$$

$$** \qquad V_{15} = \frac{273 + 15}{273} = 1{,}055 \text{ m}^3$$

și atunci:

$$D_{15} = \frac{0{,}552}{1{,}055} = 0{,}523.$$

Deci răspunsul la punctul 1° este: *densitatea metanului la* 15° C *şi* 760 $^{m}/_{m}$ *este* 0,523.

2°. Se ştie că din 1 m³ apă se obţin 1650 m³ vapori. Deci 100 m³ vapori se vor obţine din:

$$\frac{100}{1650} = 0{,}0666\ldots \text{ m}^3 \text{ apă},$$

adică din 66,6.. kgr. apă.

Dacă Q este cantitatea de căldură pentru a evapora 1 kgr. apă, q_1 şi q_2 căldura necesară pentru a încălzi apa la 100° şi căldura latentă de vaporirare, atunci:

$$Q = q_1 + q_2.$$

Dar:

$$q_1 = m(t_2 - t_1) \quad \text{cu} \quad \begin{cases} t_2 = 190^\circ \\ t_1 = 15^\circ \\ m = 1 \text{ kgr.} \end{cases}$$

$$q_2 = 537 \text{ cal.},$$

deci:

$$Q = (100 - 15) + 537 = 622 \text{ cal},$$

pentru 1 kgr. apă. Pentru 66,6 kgr. vom avea nevoe de:

$$622 \times 60{,}6 = 37693{,}2 \text{ cal.},$$

sau rotund *37700 calorii.*

Puterea calorifică a metanului la 0° şi 760 $^{m}/_{m}$.

1000 gr. metan are puterea calorifică 13318 cal., deci 714 va avea puterea calorifică:

$$P = 13318 \times 714 = 9509 \text{ cal./m}^3.$$

Numărul M de m^3 metan necesari pentru a obţine 100 m^3 vapori apă, va fi dat de:

$$M = \frac{Q}{P_x \mu},$$

unde μ este randementul. Deci:

$$M = \frac{37700}{9509 \times 0{,}8} = 4{,}95 \text{ m}^3,$$

metan la 0° şi 760 $^{m}/_{m}$.

La 15°, cum se cere la 2° în enunţ, vom avea:

$$M = 4{,}95 \times 1{,}055 = 5{,}22 \text{ m}^3$$

metan.

3°. Cumbustia metanului se face după ecuaţia:

$$CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O,$$

în care volumul molecular al metanului este 22,4 şi al lui $2O_2$ este 44,8. Deci:

La 22,4 m³ metan avem 44,8 m³ oxigen.

La 4,95 m³ metan vom avea $x = \frac{44{,}8 \times 4{,}95}{22{,}4}$ oxigen

*** $x = 9{,}90$ m³ oxigen.

Din proporţia la sută de oxigen şi azot dată în enunţ, se deduce uşor aerul necesar întreţinerei arderei întregei cantităţi de metan, prin regula de trei:

21 oxigen la 100 aer

9,9 oxigen la $y = \frac{9{,}9 \times 100}{21} = 47{,}14$ m³ aer.

Iar cantitatea de aer exprimată în kgr. va fi dată de:

$$A = 47{,}14 \times 1{,}293 = 60{,}952 \text{ kgr.}$$

Am dat soluţia aşa de amănunţit pentru a încuraja corespondenţii să încerce problemele de fizică şi chimie, care, după cum se vede, nu prezintă nici o dificultate.

G. B.

646. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$C_m^n = (C_m^n)^2 - C_m^{n-1} C_m^{n+1} + 2 C_m^{n-2} C_m^{n+2} - \cdots$$
$$\cdots + 2(-1)^i C_m^{n-i} C_m^{n+i} + \cdots$$
$$+ 2(-1)^{2n-1} C_m^1 C_m^{2n-1} + 2 C_m^{2n}$$

N. I. MANOLESCU

Considerăm identitatea:

$$(1 - x^2)^m = (1 + x)^m (1 - x)^m,$$

pe care dezvoltând-o obţinem:

$$1 - C_m^1 x^2 + C_m^2 x^4 - \cdots + (-1)^n C_m^n x^{2n} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^m C_m^m x^{2n} =$$
$$(1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \cdots + C_m^n x + \cdots + C_m^m x^m)$$
$$(1 - C_m^1 x + C_m^2 x^2 - \cdots + (-1)^n C_m^n x^n - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^m C_m^m x^m).$$

Identificând coeficienţii lui x^{2n} din ambii membrii şi simplificând prin $(-1)^n$, găsim:

$$C_m^n = (C_m^n)^2 - 2 C_m^{n-1} C_m^{n+1} + 2 C_m^{n-2} C_m^{n+2} - \cdots$$
$$+ 2(-1)^{2n-1} C_m^1 C_m^{2n-1} + 2 C_m^{2n}.$$

Astfel identitatea dată este demonstrată.

Soluții date de d-nii: *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucuresti) și *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați).

1305. — *Să se găsiască numărul de 3 cifre a b c, egal cu suma*:

$$a \times b^2 + b \times c^2 + c \times a^2$$

G-L GH. BUICLIU

Soluția. Ecuația problemei este:

$$100 \times a + 10 \times b + c = a \times b^2 + b \times c^2 + c \times a^2.$$

Dăm lui a pe rând valorile 1, 2, ... 9 și corespunzător lui a se dau lui b pe rând valorile 0, 1, 2, ... 9. Se obțin astfel 90 ecuațiuni în c de forma:

$$b \times c^2 + (a^2 - 1)\, c + a \times b^2 - 10\,(10\, a + b) = 0,$$

care se rezolvă cu condiția ca c să fie întreg și mai mic de cât 10. Se găsește că singurul sistem de soluțiuni este:

$$a = 1, \qquad b = c = 5.$$

Deci numărul căutat este 155. Avem:

$$155 = 1 \times 5^2 + 5 \times 5^2 + 5 \times 1.$$

A rezolvat problema pe această cale d-nii: *Amărășteanu M.* (Craiova) și *Moisovici M. Ștefan* (Craiova).

D-l *Maşcaş Gh. P.* (Șc. Politechnică, Timișoara) a afirmat că numărul cerut este 155, fără a arăta cum l-a găsit sau a dovedi că nu mai sunt și altele

1418. — *Să se afle două numere de câte trei cifre toate diferite, care se divid unul cu altul, câtul împărțirei lor fiind un cub.*

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Fie $a\,b\,c$ și $d\,e\,f$ numerile de câte trei cifre toate diferite între ele. Câtul lor fiind cub (natural întreg), rezultă că este 8. Avem astfel:

(1) $$a\,b\,c = 8 \times d\,e\,f.$$

Primul membru fiind de trei cifre, nu putem lua de cât $d = 1$, iar $e = 2$ fiindcă $e \neq d$ și pentru că dacă am avea $e \geqq 3$, membrul al 2-lea din (1) ar fi de patru cifre.

Rezultă că relația (1) e de forma:

(2) $$a\,b\,c = 8 \times 12\,f.$$

Observăm că $f < 5$, căci astfel $8 \times 12\,f$ ar fi de patru cifre, iar pe altă parte f fiind diferit de 1 și 2, poate fi 3 sau 4, astfel că relația (2) devine:

(3) $$a\,b\,c = 8 \times 123 = 984,$$

(4) $$a\,b\,c = 8 \times 124 = 992.$$

Relația (4) nu-i compatibilă cu enunțul, căci 992 are două cifre egale, pe când relația (3) este, fiindcă 984 are cifre diferite și diferite de acelea ale lui 123.

Numerile cerute sunt astfel 984 și 123, fiindcă are cifrele diferite și satisface relația:

$$\frac{984}{123} = 8.$$

Soluții date de d-nii: *Amărășteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Boborodea Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Dolban Gh.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Maşcaş Petre* (Șc. Polit, Timișoara), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iași), *Nedelcu V. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuți), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu St.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Rajka Z.* (lic. Orăștie), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Russu I. Eugen* (lic. Milit., Cernăuți), *Stefănescu Costin* (lic. Milit, N Filipescu) și *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1421. — *Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare există relațiile*:

$$\frac{a^4 + b^2 c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4 + c^2 a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4 + a^2 b^2}{(c-a)(c-b)} = (a+b+c)^2$$

$$\frac{a^4 - b^2 c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4 - c^2 a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4 - a^2 b^2}{(c-a)(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2$$

V. THÉBAULT

Prima soluție. Insemnand cu E și F respectiv primii membrii a-i relațiilor cerute, putem scri aducând la același numitor:

$$E = \frac{-(a^4 + b^2 c^2)(b-c) - (b^4 + c^2 a^2)(c-a) - (c^4 + a^2 b^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$E = \frac{-(a^4 - b^2 c^2)(b-c) - (b^4 - c^2 a^2)(c-a) - (c^4 - a^2 b^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Observăm cu ușurință că pentru $a = b$, numărătorii ambilor fracții E și F se anulează, deci se divid prin $(a-b)$. Analog se arată că ei se divid și prin $(b-c)$, $(c-a)$, deci și cu produsul:

$$(a-b)(b-c)(c-a).$$

De altă parte numărătorii fracţiilor E şi F, fiind polinoame omogene şi simetrice în a, b, c, de gradul al 5-lea, câtul lor prin $(a-b)(b-c)(c-a)$ este simetric şi de gradul al 2-lea, deci putem scri:

$$(1)\quad E=\frac{-(a^4+b^2c^2)(b-c)-(b^4+c^2a^2)(c-a)-(c^4+a^2b^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=k\sum a^2+k_1\sum ab$$

$$(2)\quad F=\frac{-(a^4-b^2c^2)(b-c)-(b^4-c^2a^2)(c-a)-(c^4-a^2b^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=k'\sum a^2+k_1'\sum ab,$$

unde trebuie determinaţi k, k_1; k', k_1'.

In adevăr, pentru $a=0$, aceste relaţii, adevărate pentru orice valori ale lui a, b, c, ne dau:

$$\frac{-b^2c^2(b-c)-b^4c+bc^4}{-bc(b-c)}\equiv k(b^2+c^2)+k_1bc$$

$$\frac{b^2c^2(b-c)-b^4c+bc^4}{-bc(b-c)}\equiv k'(b^2+c^2)+k_1'bc.$$

Observând că:

$$-b^4c+bc^4=-bc(b^3-c^3),$$

putem simpliflica fracţiile din primii membrii şi obţinem:

$$bc+(b^2+bc+c^2)\equiv k(b^2+c^2)+k_1bc$$

$$-bc+(b^2+bc+c^2)\equiv k'(b^2+c^2)+k_1'bc,$$

sau:

$$b^2+c^2+2bc\equiv k(b^2+c^2)+k_1bc$$

$$b^2+c^2\equiv k'(b^2+c^2)+k_1'bc.$$

De aci deducem imediat:

$$k=1,\ k_1=2;\qquad k'=1,\ k_1'=0,$$

astfel că relaţiile (1) şi (2) devin:

$$E=\sum a^2+2\sum ab=(a+b+c)^2$$

$$F=\sum a^2=a^2+b^2+c^2.$$

Relaţiile cerute sunt astfel stabilite.

Soluţii analoage date de d-ra: *Popescu N. Maria* şi de d-nii: *Andrunachievici Vl.*, *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila) şi *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

Soluţia 2-a. In „R. M. T", vol. XIII, pag. 123 şi 122, sunt stabilite între altele şi următoarele două identităţi:

$$(3)\quad \sum\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

$$(4)\quad \sum\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}=\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2}.$$

Dacă în (4) înmulţim ambii membrii cu $a^2b^2c^2$, avem:

$$(5)\quad \sum\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}=ab+bc+ca.$$

Adunând şi scăzând relaţiile (4) şi (5), obţinem:

$$\sum\frac{a^4+b^2c^2}{(a-b)(a-c)}=(a+b+c)^2,$$

$$\sum\frac{a^4-b^2c^2}{(a-b)(b-c)}=a^2+b^2+c^2,$$

adică tocmai relaţiile cerute.

Soluţii analoage date de autor şi de d-nii: *Amărăşteanu F.* (Craiova) şi *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi).

Observare. Condiţia ca a, b, c să fie laturi a unui triunghiu oarecare, nu este necesară; putem spune numai că a, b, c sunt numere diferite, oarecare.

1424. — *Să se arate că în orice triunghiu exis'ă relaţia:*

$$\frac{h_a h_b h_c}{(h_a+h_b)(h_b+h_c)(h_c+h_a)}=\frac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}$$

ION MARGINEANU

Insemnând cu E primul membru şi folosind formulele cunoscute într'un triunghiu:

$$h_a=c\sin B=b\sin C,\quad h_b=a\sin C=c\sin A,$$

$$h_c=b\sin A=a\sin B,$$

deducem:

$$h_a+h_b=c(\sin A+\sin B),\ (h_b+h_c=a(\sin B+\sin C),$$

$$h_c+h_a=b(\sin C+\sin A)$$

şi deci putem scri:

$$E=\frac{abc\sin A\sin B\sin C}{abc(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}=$$

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}.$$

Astfel relaţia cerută există.

Soluții date de d-ra: *Popescu N. Maria* și de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzești, Craiova), *Andrunachievici Al Vl.* (lic. Chișinău), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iași), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman A. Victor* (student, Cluj), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Ofițeri de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Maşcaş Petru* (Șc. Polit, Timișoara), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iași), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Moisovici Ştefan* (Colegiu, Carol I, Craiova), *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuș), *Muşcinschi V. Georges* (lic. Milit, Chișinău), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pambucdjian Kricor* (lic. Constanța), *Petrescu-Craiovița Anastasie*, *Popoviciu Gavril* (bacalaureat), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoica N. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș).

1425. — *Un număr* N_1 *este format din patru cifre consecutive așezate în ordine de mărime, cifra unităților fiind cea mai mică. Dacă* N_2 *este numărul cu aceleași cifre scrise în ordine inversă, să se arate că numărul* $3(N_1 - N_2)$ *este cub perfect.*

V. THÉBAULT

Dacă a este cifra unimilor numărului N_1, avem conform enunțului:

$$N_1 = 1000(a+3) + 100(a+2) + 10(a+1) + a = 1111a + 3210$$

$$N_2 = 1000a + 100(a+1) + 10(a+2) + a + 3 = 1111a + 123.$$

De aci deducem:

$$N_1 - N_2 = 3087,$$

deci:

$$3(N_1 - N_2) = 9261 = 21^3.$$

Se vede astfel că $3(N_1 - N_2)$ este cub perfect.

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (absolvent, lic. Buzești, Craiova), *Apostol Nicolae* (lic Milit., Cernăuți), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, București), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Grabovschi F. Marcel* (Orheiu), *Herman Victor* (student, Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iași), *Nedelea V. O.*, *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg M. Israel* (lic. Roman) și *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1429. — *Se consideră ecuația de gradul al 2-lea:*

$$x^2 + 2(a\lambda + b)x + c\lambda + d = 0,$$

unde a, b, c, d *sunt numere date, iar* λ *este un parametru. Există două valori pentru* λ *și anume* λ_1 *și* λ_2, *pentru care ecuația dată are o singură rădăcină. Rădăcinele ecuației date, care corespund la* λ_1 *și* λ_2, *se notează cu* x_1 *și* x_2.

Fără să se rezolve nici o ecuație, să se formeze ecuația de gradul al 2-lea, care are ca rădăcini pe x_1 *și* x_2.

D. V. IONESCU

Pentru ca ecuația dată să aibă o singură rădăcină, o rădăcină dublă deci, trebue ca realizantul ei să fie nul, adică:

$$(a\lambda + b)^2 - c\lambda - d = 0,$$

care ordonată după puterile descrescătoare a lui λ, devine:

$$(1) \qquad a^2\lambda^2 + (2ab - c)\lambda + b^2 - d = 0$$

și această ecuație are două rădăcini λ_1 și λ_2.

Scriind suma rădăcinelor ecuației date, corespunzătoare lui λ_1 și λ_2, obținem conform enunțului:

$$2x_1 = -2(a\lambda_1 + b), \qquad 2x_2 = -2(a\lambda_2 + b),$$

deci:

$$(2) \quad x_1 = -(a\lambda_1 + b), \qquad x_2 = -(a\lambda_2 + b).$$

Pentru a obține ecuația de gradul al 2-lea cu rădăcinele x_1 și x_2, calculăm suma și produsul lor, în funcție de a, b, c, d. Astfel din (2) deducem:

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 = -a\lambda_1 - b - a\lambda_2 - b = -a(\lambda_1 + \lambda_2) - 2b \\ x_1 x_2 = (a\lambda_1 + b)(a\lambda_2 + b) = a^2\lambda_1\lambda_2 + \\ \qquad ab(\lambda_1 + \lambda_2) + b^2 \end{cases}$$

Cum λ_1 și λ_2 sunt rădăcinele ecuației (1), suma și produsul lor care intră în (3), se pot calcula imediat, privind ecuația (1), — în virtutea relațiilor cunoscute între rădăcinele unei ecuații de gradul al 2-lea și coeficienții ei — avem astfel:

(4) $\lambda_1+\lambda_2=\frac{c-2ab}{a^2}$, $\lambda_1\lambda_2=\frac{b^2-d}{a^2}$.

Relaţiile (3) devin, ţinând seamă de (4):

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a\frac{c-2ab}{a^2}-2b=-\frac{c}{a} \\ x_1x_2=a^2\frac{b^2-d}{a^2}+ab\frac{c-2ab}{a^2}+ \\ b^2=b^2-d+\frac{bc}{a}-2b^2+b^2=\frac{bc-a}{a} \end{cases}$$

Cunoscând astfel suma şi produsul lui x_1 şi x_2, ecuaţia de gradul al 2-lea cerută cu rădăcinele x_1, x_2, este:

$$x^2+\frac{c}{a}x+\frac{bc-ad}{a}=0,$$

sau:

$$ax^2+cx+bc-ad=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Grabovschi Eugen* (Orheiu), *Herman Victor* (student, Cluj), *Lascu Bal* (student), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Murgu Marţian* (lic. Beiuş) şi *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1513. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abaca$, în care diferenţa între a şi c ne dă rădăcina patrată a lui a şi în care b este prim.

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

1514. — Să se determine valorile minime întregi pozitive a şi b, astfel ca resturile împărţirii expresiei:

$$f(x)=a\times 8^{2x}+(a+b)\times 8^x+b,$$

prin 49 pentru $x=0$ şi $x=1$ să fie ambele de forma mult. $7+5$, iar diferenţa acestor resturi, în ordinea menţionată, să fie 28.

EUGEN VISA

1515. — Să se demonstreze că piciorul bisectoarei unghiului A al triunghiu ABC, poate fi mijlocul segmentului determinat de picioarele înălţimei AH şi al medianei AM.

Să se construiască triunghiul ABC în acest caz, cunoscând latura BC şi unghiul A.

G-L GH. BUICLIU

1516. — Intre diametrele a două cercuri concentrice există relaţia:

$$4d^2=(2+\sqrt{3})D^2.$$

1°. Care este poligonul regulat circumscris cercului de diametru d şi înscris cercului de diametru D.

2°. Să se calculeze latura lui.

S-LT. IOAN C. SAVIN

1517. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=3 \\ (x-1)(y-1)(z-1)=6 \\ x+y+z=9 \end{cases}$$

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

1518. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} y^2z+yz^2=30 \\ z^2x+zx^2=12 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1519. — Să se arate că în orice triunghiu, avem:

$$\sum aI_a+\sum\cos^2\frac{A}{2}=4s+\frac{1}{2R}\sum r_a,$$

în care I_a este distanţa dintre ortocentru şi vârful A, iar celelalte notaţii sunt cele obicinuite.

CORNELIU LUPESCU

1520. — A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească inegalitatea:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}<1.$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăşteanu F. M., (N, P, 1219, 1290, 1291, 1351, 1385, 1388, 1393, 1418, 1419, 1426, 1429, 1433, 1434, 1440, 1441, 1447, 1449, 1452, 1455, 1457, 1458, 1462, 1463, 1464, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1473, 1476, 1477, 1479, 1480, 1481, 1484, 1487, 1488, 1491, 1493, 1494, 1497, 1500, 1503, 1504, 1505, 1509, 1510, 1512). *Andrunachievici Vl.* (1468, 1471, 1480, 1484, 1488, 1496, 1503, 1504, 1512). *Berinde Titus* (P, 1427, 1471). *Cazanacli V. P.* (1449, 1450. 1451, 1452, 1453, 1454, 1456, 1457, 1458, 1459, 1462, 1463, 1464, 1465, 1468, 1469, 1470, 1471). *Comloşan Cornelia* (1469, 1470, 1484, 1487, 1494, 1506). *Coşniţă Cezar* (A) *Ghiţescu Spiridon* (A). *Gloden A.* (N, 1408, 1416) *Grumăzescu Mircea* (P). *Herman Victor* (N, 1371, 1380). *Jidame Constantin* (P). *Kornis Ernest* (1497, 1498, 1501). *Lascu Bal* (1405, 1420, 1429, 1445, 1465, 1485, 1494). *Lupescu Gh. Corneliu* (P., 1231, 1426, 1431, 1433, 1441, 1447, 1449, 1451, 1452, 1453, 1456, 1462, 1465, 1467, 1468, 1470, 1471, 1472, 1473, 1476, 1477, 1480, 1484, 1488, 1494, 1499, 1500, 1503, 1509, 1510, 1511). *Matei D. D-tru* (P, N, 1461, 1203, 1225, 1370, 1377, 1385, 1386, 1390, 1392, 1405, 1417, 1433, 1434, 1446, 1447, 1457, 1458, 1462, 1463, 1464, 1466, 1468, 1471, 1472, 1473, 1481, 1482, 1490). *Marin P. Tica* (P). *Milu N. Ion* (1469, 1470, 1471, 1473, 1476). *Negrea A. Mircea* (1493, 1499, 1503, 1504, 1506, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512). *Negulescu D. Ştefan* (101, 1433, 1439, 1467, 1468, 1469, 1470, 1484), *Păduret A. Vasile* (1466, 1467), *Panait Mircea* (1401, 1402, 1404, 1411, 1441, 1412). *Popescu Alexandru Nicolae* (1484, 1494, 1506, 1509), *Popovici Gavril* (P, 1389, 1408, 1410, 1411, 1412, 1413, 1426, 1433) *Ripianu Andrei* (1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1470, 1471, 1473, 1476, 1477, 1480, 1487, 1490, 1493, 1494, 1498, 1502, 1504, 1505, 1506, 1512). *Rosenberg I.* (1408, 1468, 1476, 1488, 1491). *Rosenthal Tiberiu* (1467). *Savin C. Ion* (P, N). *Viciu A. Aurel* (1462, 1453, 1465, 1466, 1467, 1468, 1470, 1471, 1483, 1484, 1487, 1488, 1494, 1505), *Vişa Eugen* (A, P, 1476, 1493, 1505), *Vlad M. C.* (1470, 1484, 1487, 1494, 1506). *Zagaican I.* (1385, 1387, 1389, 1401, 1402, 1403, 1408, 1409, 1412, 1413, 1464). *Zigu Segal* (1468, 1473, 1480, 1484, 1487, 1488, 1493, 1494, 1505).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1936.

Costul *special* a unui abonament fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ANNÉE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XVI. 15 OCTOMVRIE 1936 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. RELATIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI POLIGON CONVEX, PRECUM SI O IDENTITATE LAGRANGE, STABILITE VECTORIAL.
2. NOTE MATEMATICE: 14, 15, 16.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 186, 243, 1212, 1403, 1431, 1432, 1439, 1441, 1444.
5. PROBLEME PROPUSE: 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208. sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Abonamentul pe anul XVI-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMVRIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

RELAȚIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI POLIGON CONVEX, PRECUM ȘI O IDENTITATE LAGRANGE, STABILITE VECTORIAL

DE
V. ALACI

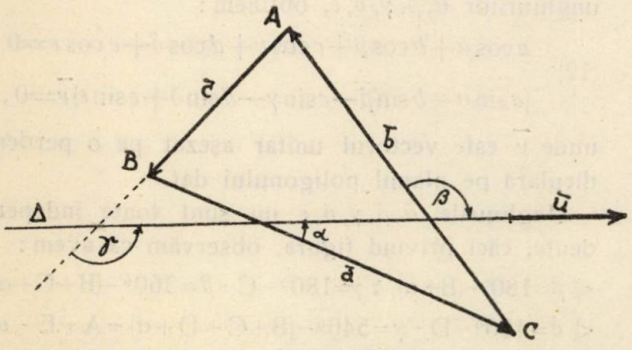
1. *Cazul triunghiului.* Fie triunghiul A B C și următorii trei vectori asezați respectiv pe laturile lui:

$$\overline{BC} = \bar{a}, \quad \overline{CA} = \bar{b}, \quad \overline{AB} = \bar{c}.$$

Acești vectori formând un poligon închis, satisfac relația vectorială:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0. \tag{1}$$

Să ducem acum o dreaptă Δ, care să intersecteze dreptele pe care se găsesc vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ și fie α, β, γ respectiv unghiurile ce fac direcțiile pozitive a acestor vectori, cu direcția pozitivă a dreptei Δ



Fie încă un vector unitar $\bar{u}$ asezat pe Δ, adică:

$$\bar{u} = \bar{1}. \tag{2}$$

Dacă înmulțim *scalar* și *vectorial* relațiile (1) și (2) și ținem seamă de regulile de *înmulțire scalară*[1] și *vectorială*[2] a doi vectori, reguli cunoscute din *Calculul Vectorial*, obținem:

$$\begin{aligned} &a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0 \\ &(a\sin\alpha - b\sin\beta + c\sin\gamma)\bar{\nu} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

unde $\bar{\nu}$ este un vector unitar, indicând direcția și sensul pozitiv, luat pe o perpendiculară pe planul triunghiului A B C.

Unghiurile α, β, γ nu sunt toate independente, în adevăr, observând figura, putem scri:

$$\sphericalangle\beta = 180^0 - (C + \alpha), \quad \sphericalangle\gamma = 180^0 - (B - \alpha).$$

Ținând seamă de aceste expresii, relațiile (3) se mai pot scri:

$$\begin{aligned} a\cos\alpha &= b\cos(C+\alpha) + c\cos(B-\alpha) \\ a\sin\alpha &= b\sin(C+\alpha) - c\sin(B-\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Suma patratelor acestor relații și apoi produsul lor multiplicat cu 2, ne dau încă următoarele relațiuni:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(B+C) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2\sin 2\alpha = b^2\sin 2(C+\alpha) - c^2\sin 2(B-\alpha) - 2bc\sin(B-C-2\alpha). \tag{5}$$

Prima din relațiile (5) vedem că este independentă de α, ea este o relație bine cunoscută și se poate stabili și direct pe cale vectorială, ridicând la patrat relația:

$$\bar{a} = -(\bar{b} + \bar{c}),$$

dedusă din (1).

Prin particularizarea lui α din relațiile (4) și a 2-a din (5), obținem și alte relațiuni între elemen-

[1]) *Produs scalar a doi vectori*, este produsul valorilor lor absolute înmulțit cu cosinusul unghiului format de direcțiile lor pozitive.

[2]) *Produsul vectorial al doi vectori*, este un vector perpendicular pe planul lor — de partea în care un observator așezat în lungul direcției lui pozitive ar vedea suprapunându-se primul vector pe al 2-lea, printr'o rotație în sensul pozitiv trigonometric — a cărui mărime este produsul valorilor lor absolute înmulțit cu sinusul unghiului format de direcțiile lor pozitive.

tele unui triunghiu, unele cunoscute, altele care pot fi noui, dar uşor de stabilit şi pe cale directă.

Cazuri particulare. 1°. Pentru $\alpha = 0$, relaţiile (4) şi ultima din (5), devin:

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b\sin C = c\sin B \tag{6}$$
$$b^2\sin 2C - c^2\sin 2B = 2bc\sin(B-C).$$

Primele două relaţiuni sunt bine cunoscute într'un triunghiu.

2°. Pentru $\alpha = 45^0$, relaţiile (4) şi ultima din (5) devin:

$$a\sqrt{2} = 2b\cos(45^0+C)+2c\cos(45^0-B)$$
$$a\sqrt{2} = 2b\sin(45^0+C)+2c\sin(45^0-B) \tag{7}$$
$$a^2 = b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B-C).$$

Aceste relaţii se pot stabili şi direct.

3°. Pentru $\alpha = A$, relaţiile (4) şi ultima din (5) devin:

$$a\cos A + b\cos B = c\cos(B-A)$$
$$a\sin A = B\sin B - c\sin(B-A) \tag{8}$$
$$a^2\sin 2A + b^2\sin 2B + c^2\sin 2(B-A) = 2bc\sin(2B-A),$$

relaţiuni care se pot şi direct stabili.

4°. In fine, pentru $\alpha = \frac{A}{2}$, relaţiile (4) şi ultima din (5) devin:

$$a\cos\frac{A}{2} = b\cos\left(C+\frac{A}{2}\right)+c\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)$$
$$a\sin\frac{A}{2} = b\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)-c\sin\left(B-\frac{A}{2}\right) \tag{9}$$
$$a^2\sin A = b^2\sin(B-C)+c^2\sin(A-2B)+2bc\sin 2B.$$

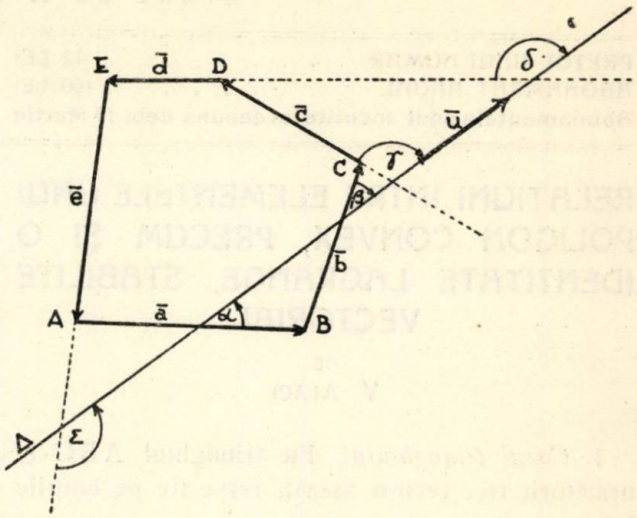
Relaţiile acestea se pot stabili şi direct.

2. *Cazul poligonului convex.* Fie un poligon convex oarecare, de exemplu pentagonul ABCDE. Pe laturile lui considerăm vectorii:

$$\overline{AB} = \bar{a},\ \overline{BC} = \bar{b},\ \overline{CD} = \bar{c},\ \overline{DE} = \bar{d},\ \overline{EA} = \bar{e}.$$

Aceşti vectori formând un poligon închis, satisfac relaţia vectorială:

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e} = 0. \tag{10}$$



Ducem apoi o dreaptă Δ, care să intersecteze dreptele pe care se găsesc vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ şi însemnăm cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, respectiv, unghiurile ce le fac direcţiile pozitive a acestor vectori, cu direcţia pozitivă a dreptei Δ, indicată de vectorul unitar $\bar{u}$, adică:

$$\bar{u} = \bar{1}. \tag{11}$$

Dacă înmulţim *scalar* şi *vectorial* relaţiile (10) şi (11) şi ţinem seamă de sensul trigonometric al unghiurilor $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, obţinem:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta + e\cos\varepsilon = 0$$
$$(a\sin\alpha - b\sin\beta - c\sin\gamma - d\sin\delta + e\sin\varepsilon)\bar{v} = 0, \tag{12}$$

unde $\bar{v}$ este vectorul unitar aşezat pe o perpendiculară pe planul poligonului dat.

Unghiurile $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ nu sunt toate independente, căci privind figura, observăm că avem:

$\sphericalangle\beta = 180^0 - (B+\alpha)$, $\sphericalangle\gamma = 180^0 - C + \beta = 360^0 - (B+C+\alpha)$,
$\sphericalangle\delta = 180^0 - D + \gamma = 540^0 - (B+C+D+\alpha) = A + E - \alpha$,
$\sphericalangle\varepsilon = 180^0 - \delta + E = 180^0 - (A-\alpha)$.

In virtutea acestor expresiuni, relaţiile (12) devin:

$$a\cos\alpha = b\cos(B+\alpha) - \cos(B+C+\alpha) - d\cos(A+E-\alpha) + e\cos(A-\alpha)$$
$$a\sin\alpha = b\sin(B+\alpha) - c\sin(B+C+\alpha) + d\sin(A+E-\alpha) - e\sin(A-\alpha). \tag{13}$$

Din aceste relaţii, putem deduce altele analoage relaţiilor (5).

In cazul particular $\alpha = 0$, relaţiile (13) devin:

$$(14)\qquad \begin{aligned} a &= b\cos B - c\cos(B+C) - d\cos(A+E) + e\cos A \\ 0 &= b\sin B - c\sin(B+C) + d\sin(A+E) - e\sin A . \end{aligned}$$

Observare. Relaţiile (4) şi (12) se pot obţine şi prin proecţii, proectând triunghiul A B C şi poligonul A B C D E pe o dreaptă Δ şi o perpendiculară pe ea [1].

3. *Cazul unei identităţi a lui Lagrange.* Fie un sistem de axe trirectangular $O\,x\,y\,z$ şi vectorii:

$$\overline{OA} = \overline{A}, \quad \overline{OX} = \overline{X},$$

de proecţie respectiv, (a, b, c) şi (x, y, z).

Expresiile analitice a acestor vectori sunt:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \overline{A} &= a\,\overline{i} + b\,\overline{j} + c\,\overline{k} \\ \overline{X} &= x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}, \end{aligned}$$

unde $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ sunt vectorii unitari aşezaţi pe cele trei axe, $O\,x$, $O\,y$, $O\,z$.

Dacă înmulţim *scalar* şi *vectorial* relaţiile (15) şi ţinem seamă de cunoştinţele din *Calculul Vectorial*, avem respectiv relaţiile:

$$A\,X\cos(\overline{A}, \overline{X}) = a\,x + b\,y + c\,z,$$

$$A\,X\sin(\overline{A}, \overline{X}).\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$(b\,z - c\,y)\,\overline{i} + (c\,x - a\,z)\,\overline{j} + (a\,y - b\,x)\,\overline{k},$$

unde $\overline{v}$ este vectorul unitar aşezat pe o perpendiculară pe planul $(\overline{A}, \overline{X})$.

Ridicând la patrat aceste relaţii şi adunându-le, avem:

$$(16)\qquad \begin{aligned} A^2 X^2 = {} & (a\,x + b\,y + c\,z)^2 + (b\,z - c\,y)^2 + \\ & (c\,x - a\,z)^2 + (a\,y - b\,x)^2, \end{aligned}$$

fiind-că:

$$\overline{v}^2 = \overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = 1, \text{ iar: } \overline{i}\,\overline{j} = \overline{j}\,\overline{k} = \overline{k}\,\overline{i} = 0.$$

Pe de altă parte, valoarile absolute a vectorilor $\overline{A}$ şi $\overline{X}$, în funcţie de proecţiile lor sunt date de relaţiile:

$$A^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad X^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

astfel că relaţia (16) devine:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (a\,x + b\,y + c\,z)^2 =$$
$$(a\,y - b\,x)^2 + (b\,z - c\,y)^2 + c\,x - a\,z)^2,$$

care este o identitate cunoscută a lui *Lagrange* şi pe care am stabilit'o pe cale *vectorială*.

[1] A se vedea şi Nota Matematică a d-lui *N. N. Mihăileanu*, din „R. M. T." anul XVI, No. 3, p. 31.

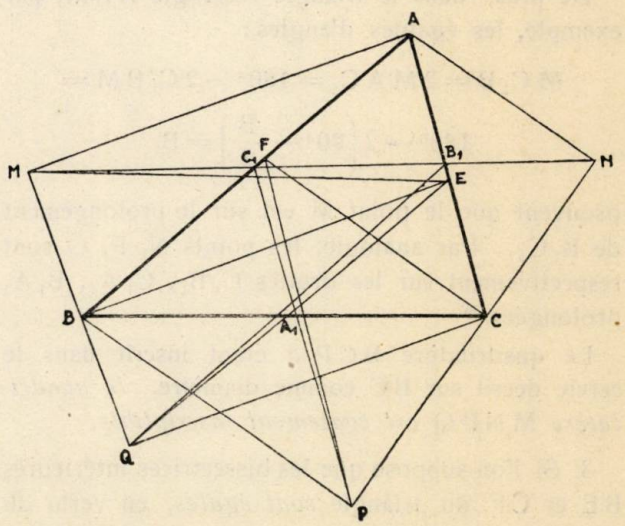
NOTE MATEMATICE

14. — *Sur le triangle isoscèle.*

Voici encore une démonstration, peut-être nouvelle, de ce théorème:

Tout triangle qui a deux bissectrices intérieures égales, est isoscèle. [1]

1. Considérons d'abord un triangle *quelconque* A B C, deux droites également quelconques B E, C F, puis leurs perpendiculaires B E′, C F′, en B et C, qui coupent A C, A B en E′, F′. Soient M et Q, N et P les intersections des droites B E′, C F′ avec les parallèles à B E, C F issues respectivement des sommets A et C, A et B; A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés B C, C A, A B du triangle.



On a, en grandeur et en signe, les relations d'aires:

[1] Nous avons dèja donné une démonstration de ce théorème, „Revista", XII–99. (V. T.)

$$BME = BAE, \qquad BEQ = BEC,$$
$$CFN = FAC, \qquad CPF = CBF,$$

d'où l'on tire les suivantes:

$$MEQ = BME + BEQ = BAE + BEC = ABC,$$
$$PFN = CFN + CPF = FAC + CPF = ABC,$$

et finalement:

$$\frac{1}{2}MQ.BE = MEQ = ABC = PFN = \frac{1}{2}PN.CF.$$

Dès lors, *les segments rectilignes* BE, CF *sont inversement proportionnels aux segments rectilignes* MQ, NP. Cette propriété subsiste pour les longueurs BE′, CF′ et les segments rectilignes M′Q′, N′P′ déterminés sur BE, CF par les parallèles à BE′, CF′, issues des sommets A et C, A et B.

2. Lorsque les droites BE, CF sont les bissectrices des angles B C d'un triangle *quelconque* ABC, et BE′, CF′ les bissectrices extérieures des mêmes angles, on a ce théorème:

Dans tout triangle, les longueurs des bissectrices intérieures (ou extérieures) *sont inversement proportionnelles aux projections orthogonales des côtés opposés sur les bissectrices extérieures* (ou intérieures) *correspondantes.*

De plus, dans le triangle rectangle ABM, par exemple, les égalités d'angles:

$$MC_1B = 2MAC_1 = 180^0 - 2C_1BM =$$
$$180^0 - 2\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = B,$$

prouvent que le point M est sur le prolongement de B_1C_1. Par analogie, les points N, P, Q sont respectivement sur les droites C_1B_1, C_1A_1, B_1A_1 prolongées.[2]

Le quadrilatère BCPQ étant inscrit dans le cercle décrit sur BC comme diamètre, *le quadrilatère* MNPQ *est également inscriptible.*

3. Si l'on suppose que les bissectrices intérieures BE et CF du triangle *sont égales*, en vertu du théorème précédent, MQ = NP. Les bissectrices extérieures BE′, CF′ étant concourantes, le quadrilatère inscriptible MNPQ est un trapèze isoscèle, de même que le quadrilatère BCPQ, et l'on a ces égalités d'angles:

$$90^0 - \frac{B}{2} = QBC = BCP = 90^0 - \frac{C}{2},$$

d'où:

$$B = C \quad \text{et} \quad AB = BC.$$

C. Q. F. D.

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

[2]) D'une manière générale, dans tout triangle, les projections orthogonales des sommets sur les six bissectrices, sont douze points alignés quatre par quatre sur les droites joignant les milieux des côtés.

15. — *Numere interesante cu cifre diferite* [1]. Soluţiile ecuaţiei:

$$N = p \times N_p,$$

pentru $p = 3$ sunt numeroase şi nu se pot găsi pe calea formulelor generale ale matematicei. Am examinat problema în felul următor. Fie de exemplu 24, ultimele două cifre ale lui N_p. Inmulţind cu 3 se găsesc că ultimele două cifre ale lui N sunt 72, acceptabile. Dacă c este cifra sutelor lui N_p, atunci $3c$ va trebui să se termine în o altă cifră de cât 7 şi 2, deci c poate fi una din cifrele 0, 1, 5, 6, 7, 8. Pentru fiecare din aceste valori se caută, care poate fi valoarea cifrei a patra d, etc. Calea este foartă lungă, dar în cursul calculelor se găsesc simplificări şi aranjări de calcule care urmează cercetarea.

Pe această cale am găsit soluţiile din următorul tabel.

3×41579862=124739586	3×46197582=138592746
3×41597862=124793586	3×46217598=138652794
3×41652789=124958367	3×47598612=142795836
3×41652879=124958637	3×47598621=142795863
3×41796582=125389746	3×47651289=142953867
3×41798250=125394768	3×47652891=142958673
3×41965782=125897346	3×48597612=145792836
3×41978250=125934768	3×48597621=145792863
3×42159780=126479358	3×48765129=146295387
3×42157980=126473958	3×48765291=146295873
3×42179658=126538974	3×48912765=146738295
3×42196578=126589734	3×48927651=146782953
3×42561978=127685934	3×48975126=146925378
3×42789165=128367495	3×48975261=146925783
3×42879165=128637495	3×48976125=146928375
3×45761982=137285946	3×48976251=146928753
3×45762198=137286594	3×49857612=149572836
3×45819762=137459286	3×49857621=149572863
3×45821976=137465928	3×49128765=147386295
3×45976182=137928546	3×49287651=147862953
3×45976218=137928654	3×49758612=149275836
3×45981762=137945286	3×49758621=149275863
3×46175982=138527946	3×49857612=149572836

[1]) Continuarea notei cu acelaşi titlu de la pag. 80.

$3\times49857621=149572863$
$3\times49875126=149625378$
$3\times49875261=149625783$
$3\times49876125=149628375$
$3\times49876251=149628753$
$3\times51248976=153746928$
$3\times51249876=153749628$
$3\times51276489=153829467$
$3\times51642789=154928367$
$3\times51642879=154928637$
$3\times52489761=157469283$
$3\times52498761=157496283$
$3\times52764891=158294673$
$3\times52789164=158367492$
$3\times52876191=158629473$
$3\times52879164=158637492$
$3\times54179826=162539478$
$3\times54179826=162593478$
$3\times54261978=162785934$
$3\times56179824=168539472$
$3\times56197824=168593472$
$3\times56241798=168725394$
$3\times56241978=168725934$
$3\times56417928=169253784$
$3\times56418279=169254837$
$3\times56419278=169257834$
$3\times56427819=169283457$
$3\times56427918=169283754$
$3\times56428179=169284537$
$3\times57461982=172385946$
$3\times57462198=172386594$
$3\times57498612=172495836$
$3\times57498621=172495863$
$3\times57819642=173458926$
$3\times57821964=173465892$
$3\times57964182=173892546$
$3\times57964218=173892654$
$3\times57984162=173952486$
$3\times57984216=173952648$
$3\times57986142=273958426$
$3\times57986214=173958642$
$3\times58179642=174538926$
$3\times58197462=174592386$
$3\times58217964=174653892$
$3\times58219746=174659238$
$3\times58497612=175492836$
$3\times58497621=175492863$
$3\times59641782=178925346$
$3\times59642178=178926524$
$3\times59746182=179238546$
$3\times59746218=179238654$
$3\times59748612=179245836$
$3\times59748621=179245863$
$3\times59784162=179352486$
$3\times59784216=179352648$
$3\times59786142=179358426$
$3\times59786214=179358642$
$3\times59817462=179452386$
$3\times59821746=179465238$
$3\times59847612=179542836$
$3\times59847621=179542863$
$3\times61248975=183749625$
$3\times61249875=183746925$
$3\times61597842=184793526$
$3\times61597842=184793526$
$3\times61745982=185237946$
$3\times61798254=185394762$
$3\times61974582=185923746$
$3\times61978254=185934762$
$3\times62157984=186473952$

$3\times62159784=186479352$
$3\times62174598=186523794$
$3\times62197458=186592374$
$3\times62469751=187469253$
$3\times62498751=187496253$
$3\times62541798=187625394$
$3\times62541978=187625934$
$3\times64152789=192458367$
$3\times64152879=192458637$
$3\times64179.82=192538746$
$3\times64195782=192587346$
$3\times64217958=192653874$
$3\times64219578=192658734$
$3\times64278915=192836745$
$3\times64287915=192863745$
$3\times64751289=194253867$
$3\times64752891=194258673$
$3\times64875129=194625387$
$3\times64875291=194625873$
$3\times64891275=194673825$
$3\times64892751=194678253$
$3\times64912871=194738625$
$3\times64928751=194786253$
$3\times65127489=195382467$
$3\times65128749=195386247$
$3\times65142879=195428637$
$3\times65142789=195428367$
$3\times65274891=195824673$
$3\times65278914=195836742$
$3\times65287491=195862473$
$3\times65287914=195863742$
$3\times65417928=196253784$
$3\times65418279=196254837$
$3\times65419278=196257834$
$3\times65427819=196283457$
$3\times65427918=196283754$
$3\times65428179=196284537$
$3\times65781942=197345826$
$3\times65782194=197346582$
$3\times65794218=197382654$
$3\times65794182=197382546$
$3\times65817942=197453826$
$3\times65821794=197465382$
$3\times65941782=197825346$
$3\times65942178=197826534$
$3\times71248965=213746895$
$3\times71249856=213749568$
$3\times71254986=213764958$
$3\times71285649=213856947$
$3\times71286549=213859647$
$3\times71459862=214379586$
$3\times71465289=214395867$
$3\times71598462=214795386$
$3\times71645289=214935867$
$3\times71946582=215839746$
$3\times71964582=215893746$
$3\times71982546=215947638$
$3\times72145986=216437958$
$3\times72159846=216479538$
$3\times72194658=216583974$
$3\times72196458=216589374$
$3\times72456198=217368594$
$3\times72489651=217468953$
$3\times72498561=217495683$
$3\times72546198=217638594$
$3\times72549861=217649583$
$3\times72648951=217946853$
$3\times72856491=218569473$
$3\times72865491=218569473$
$3\times72891645=218674935$

$3\times81946572=245839716$
$3\times81964572=245893716$
$3\times81972546=245917638$
$3\times82194657=246583971$
$3\times82196457=246589371$
$3\times82456197=247368591$
$3\times82546197=247638591$
$3\times84597162=253791486$
$3\times84597216=253791648$
$3\times84615972=253847916$
$3\times84621597=253864791$
$3\times84965712=254897136$
$3\times84965721=254897163$
$3\times84971256=254913768$
$3\times84972561=254917683$
$3\times85497126=256491378$
$3\times85497261=256491783$
$3\times85612497=256837491$
$3\times85624971=256874913$
$3\times85647129=256941387$
$3\times85647291=256941873$
$3\times85649127=256947381$
$3\times85649271=256947813$
$3\times85964712=257894136$
$3\times85964721=257894163$
$3\times85971462=257914386$
$3\times85972146=257916438$
$3\times86145972=258437916$
$3\times86125497=258376491$
$3\times86214597=258643791$
$3\times86495712=259487136$
$3\times86495721=259487163$
$3\times86547129=259641387$
$3\times86547291=259641873$
$3\times86549127=259647381$
$3\times86549271=259647813$
$3\times86594712=259784136$
$3\times86594721=259784163$
$3\times87124965=261374895$
$3\times87126495=261379485$
$3\times87146529=261439587$
$3\times87164529=261493587$
$3\times87264951=261794853$
$3\times87291465=261874395$
$3\times87291645=261874935$
$3\times89146527=267439581$
$3\times89164527=267493581$
$3\times89271465=267814395$
$3\times89271645=267814935$
$3\times89471265=268413795$
$3\times89472651=268417953$
$3\times89512647=268537941$
$3\times89526471=268579413$
$3\times89647125=268941375$
$3\times89647251=268941753$
$3\times89651247=268953741$
$3\times89652471=268957413$
$3\times89714526=269143578$
$3\times89714625=269143875$
$3\times89716245=269148735$
$3\times89724516=269173548$
$3\times89724615=269173845$
$3\times89725146=269175438$

$3\times91285647=273856941$
$3\times91286547=273859641$
$3\times91465287=274395861$
$3\times91645287=274935861$
$3\times92856471=278569413$
$3\times92865471=278596413$
$3\times92871645=278614935$
$3\times94657218=283971654$
$3\times94658172=283974516$
$3\times94658217=283974651$
$3\times94865712=284597136$
$3\times94865721=284597163$
$3\times94871265=284613795$
$3\times94872651=284617953$
$3\times95126487=285379461$
$3\times95264871=285794613$
$3\times95864712=287594136$
$3\times95864721=287594163$
$3\times96457218=289371654$
$3\times96458172=289374516$
$3\times96458217=289374651$
$3\times96485712=289457136$
$3\times96485721=289457163$
$3\times96487125=289461375$
$3\times96487251=289461753$
$3\times96512487=289537461$
$3\times96524871=289574613$
$3\times96587412=289754136$
$3\times96587421=289754163$
$3\times97124856=291374568$
$3\times97125486=291376458$
$3\times97158462=291475386$
$3\times97214586=291643758$
$3\times97215846=291647538$
$3\times97245618=291736854$
$3\times97248561=291745683$
$3\times97254618=291763854$
$3\times97254861=291764583$
$3\times98245617=294736851$
$3\times98254617=294763851$
$3\times98457162=295371486$
$3\times98457216=295371648$
$3\times98461572=295384716$
$3\times98462157=295386471$
$3\times98471256=295413768$
$3\times98472561=295417683$
$3\times98547126=295641378$
$3\times98547261=295641783$
$3\times98561247=295683741$
$3\times98562471=295687413$
$3\times98571462=295714386$
$3\times98572146=295716438$
$3\times98612547=295837641$
$3\times98614572=295843716$
$3\times98621457=294864371$
$3\times98625471=295876413$
$3\times98714526=296143578$
$3\times98714625=296143875$
$3\times98715246=296145738$
$3\times98716245=296148735$
$3\times98724516=296173548$
$3\times98724615=296173845$
$3\times98725140=296175438$

G-L Gh. Buicliu

16. A. *Solution générale de:*

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=x_4^2+y_4^2.$$

Si l'on a $m^2+n^2=p^2+q^2$, on aura aussi:

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=$$
$$(mp-nq)^2+(mq+np)^2=(mp+nq)^2+(mq-np)^2.$$

Comme la solution générale de $m^2+n^2=p^2+q^2$ est donné par $m=ac-bd$, $n=ad+bc$, $p=ac+bd$, $q=ad-bc$, on a:

$$\begin{cases} x_1=m^2-n^2=(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd \\ y_1=2mn=2cd(a^2-b^2)+2ab(c^2-d^2) \\ x_2=p^2-q^2=(a^2-b^2)(c^2-d^2)+4abcd \\ y_2=2pq=2cd(a^2-b^2)-2ab(c^2-d^2) \\ x_3=mp-nq=(a^2+b^2)(c^2-d^2) \\ y_3=mq+np=2cd(a^2+b^2) \\ x_4=mp+nq=(a^2-b^2)(c^2+d^2) \\ y_4=mq-np=2ab(c^2+d^2). \end{cases}$$

Pour $a=2$, $b=1$, $c=3$, $d=2$, on trouve:

$$33^2+56^2=63^2+16^2=25^2+60^2=52^2+39^2$$
$$(=4225=65^2)$$

B. *Solution générale de:*

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=\cdots=x_8^2+y_8^2.$$

Nous la trouvons en appliquant la formule:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

Par exemple:

$$(x_1^2+y_1^2)(m^2+n^2)=$$
$$[(m^2-n^2)^2+(2mn)^2](m^2+n^2)=$$
$$(m^3+mn^2)^2+(m^2n+n^3)^2=$$
$$(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2.$$
$$(x_2^2+y_2^2)^2(m^2+n^2)=$$
$$[(p^2-q^2)^2+(2pq)^2](m^2+n^2)=$$
$$(p^2m-q^2m+2pqn)^2+(p^2n-q^2n-2pqm)^2=$$
$$(p^2m-q^2m-2pqn)^2+(p^2n-q^2n+2pqm)^2$$

et, ainsi de suite, pour:

$$(x_3^2+y_3^2)(m^2+n^2),\quad (x_4^2+y_4^2)^2(m^2+n^2)$$
$$(x_1^2+y_1^2)(p^2+q^2),\quad (x_2^2+y_2^2)(p^2+q^2)$$
$$(x_3^2+y_3^2)(p^2+q^2),\quad (x_4^2+y_4^2)(p^2+p^2),$$

en supposant que $m^2+n^2=p^2+q^2$.

En appliquant 8 fois de suite la formule écrite plus haut, on trouve au total 8 expressions distinctes qui ont la même valeur. On a, en définitive, la solution suivante pour le système proposé:

$$(m^3+mn^2)^2+(m^2n+n^3)^2=$$
$$(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2=$$
$$(p^2m-q^2m+2pqn)^2+(p^2n-q^2n-2pqm)^2=$$
$$(p^2m-q^2m-2pqn)^2+(p^2n-q^2n+2pqm)^2=$$
$$(m^2p+n^2p)^2+(m^2q+n^2q)^2=$$
$$(m^2p-n^2p-2mnq)^2+(m^2q-n^2q+2mnp)^2=$$
$$(m^2p-n^2p+2mnq)^2+(-m^2q+n^2q+2mnp)^2=$$
$$(p^3-3pq^2)^2+(3p^2q-q^3)^2.$$

m, n, p et q sont liés par la relaton $m^2+n^2=p^2+q^2$. On peut remplacer, dans les expressions précédentes, m, n, p et q par $ac-bd$, $ad+bc$, ..., et on a ainsi une solution générale avec 4 paramètres arbitraires, a, b, c et d.

Exemple: $m=1$ $n=8$ $p=4$ $q=7$.

$$65^2+520^2=191^2+488^2=415^2+320^2=481^2+208^2=$$
$$260^2+455^2=364^2+377^2=140^2+505^2=524^2+7^2$$
$$(=274.625=65^3).$$

A. GLODEN
(Luxembourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 1, Septemvrie 1936. Lista Membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*". Membrii decedaţi. Asupra unei descompuneri a puterilor neperechi, de *Leonescu*. Concursul „*Gazetei Matematice*" din 1931. Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor Societăţii „G. M".

2. *Boletin Matematico*, anul IX, No. 5 Iulie 1936, Buenos Aires. Formule de reducere pentru integralele diferenţialelor cuprinzând funcţiuni hiperbolice, de *A. Gloden*. Studiul unor tipuri de ecuaţiuni de congruenţe, de *M. O. Gonzalez*. Note: Calculul sumei unei serii, de *B. I. B.* Studiul rădăcinelor unei ecuaţii, de *B. I. B.* şi *R. J. S.*

3. *Boletin Matematico*, anul IX, August 1936. Contribuţii la studiul triunghiului, de *B. I. Baidaff*. Asupra numerilor şi variabelelor hipercomplexe şi hiperbolice de *F. Toranzos*. Note: Unele relaţii trigonometrice, de *A. Gloden*. Generalizarea formulelor trigonometrice a unui triunghiu în domeniu complex, de *B. I. B.*

4 *Numerus*, revistă de matematici elementare pentru învăţământul secundar, normal, profesional şi militar sub direcţia d-lui *R. N. Raclis*. Vol. II, caietul 16, Septemvrie 1936. Probleme propuse. La Géométrie du Triangle, par *Tr. Lalesco*, suite de la page 112.

5. *Pitagora*. Revistă de matematici pentru uzul şcoalelor secundare, redactată de un grup de profesori secundari

de matematici de la Colegiul Național „Carol I.“ din Craiova, sub direcția d-lui *N. Balaban*, prof. de matematici; anul I, No. 5, Martie 1936.

Transformarea expresiilor:

$$\sqrt[m]{A \pm \sqrt[n]{B}},$$

de *G. G. Constantinescu*. Diviziunea expresiilor aritmetice, de *M. Amărăşteanu*. Note matematice; Probleme rezolvate şi propuse. Aceasta revistă conține un substanțial material matematic şi este de un real folos elevilor de liceu.

6 *A. Myller*. Curs de Geometrie Analitică, pentru elevii clasei a VIII-a Secția Ştiințifică.

Acest curs al distinsului profesor de la Universitatea din Iaşi, prin tratarea clară, elementară şi înlănțuită a chestiunilor teoretice, cât şi prin numeroasele aplicațiuni ce cuprinde, este sortită de a fi de un real folos elevilor de liceu, cărora le-o recomandăm cu stăruință şi căldură.

„Am dat o desvoltare mai mare ca de obicei notițelor istorice şi nu am uitat un scurt istoric al învățământului geometriei analitice în țara românească Am vorbit de cele trei mari probleme geometrice ale antichității care constituesc un capitol util şi atrăgător în teoria conicelor şi care, cel puțin în linii generale, ar trebui să fi cunoscut de orice licean“ ... iată câte-va rânduri din adresa trimesă de d-l prof. *Myller*, profesorilor de matematici de liceu.

Țin să revelez încă, înălțimea morală căreia i se datorește, între altele, apariția acestui minunat „Curs de Geometrie Analitică“ prin aceea că beneficiul adus de ea, este destinat de d-l prof. *Myller* „Bibliotecii Seminarului Matematic“ al Universității din Iaşi, în prezent în mare lipsă materială.

7. *Godefredo Garcia*. La metrica en un Erpacio N — Dimensional (Extracto de la Revista de Ciencias, ano XXXVIII, No. 116, Lima-Peru, 1936).

8. *Godefredo Garcia*. El problema de los dos cuerpos en la Espacio Tridimensional en la teoria clasica. (Extracto de la Revista de Ciencias, ano XXXVIII, No. 116, Lima Peru, 1936).

9. *Ion Cristescu*. Valoarea nisipurilor petrolifere. (Extrait du „Bulletin Stientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, tome 7, fasc 1 - 2).

10. *Teofil Vescan* Elementele teoriei gazelor electronice. (Extras din revista „Ştiință şi Progres“ t. III, N-rile 3-4, 1936).

PROBLEME REZOLVATE

186. — I. *Să se calculeze log. 5 în sistemul cu baza 7.*

II. *Care este baza unui sistem de logaritmi, în care 3 este logaritmul lui 5?*

L-T I LINTES

I. Avem:

$$x = \log_7 5,$$

deci:

$$5 = 7^x.$$

Prin urmare, în sistemul zecimal avem:

$$x \log 7 = \log 5,$$

de unde:

$$x = \frac{0{,}69897}{0{,}84510} = 0{,}82708\ldots$$

II. Avem:

$$3 = \log_x 5,$$

sau:

$$5 = x^3,$$

deci singura rădăcină reală este:

$$x = \sqrt[3]{5} = 1{,}7100\ldots$$

Soluții date de d-ra: *Gheorghiu Olimpia* şi de d-nii: *Atanasiu I, D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bărglăzan A.* (Sibiu), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Cocorandu M.* (Braşov) *Coşereanu Ion* (Piatra-Neamț), *Crețoiu A.*, *David Gh.* (Timişoara), *Dragomirescu B. Eduard* (Timişoara), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Gabrielescu C. Vasile* (Brăila), *Georgescu P. C.* (București), *Georgescu Valeriu I. N*, (Timişoara), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Galați), *Grabovski Eugeniu* (Orhei), *Grünfeld B. Maximilian* (Brăila), *Herşcovici E.* (Galați), *Iordache N. Ion* (C. de Argeş), *Kassargian A.* (București), *Katz Pincu* (Galați), *Longinescu A. N.* (Caracal), *Lupescu Gh. Corneliu* (Roman), *Margulius Marius* (București), *Măru D-tru* (Galați), *Mehlman Teodor* (Câmpulung), *Miclescu Andrei* (Timişoara), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Munteanu Ludovic* (Timişoara), *Orbonaş Iuliu* (Deva), *Popea Gh. Ovidiu* (Chişinău), *Popovici Th. Ioan* (București), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Silion Gh. Ion* (Câmpina), *Solomon Nicu* (Timişoara), *Stamatescu I. Valeriu* (București), *Ştefănescu Emil* (București), *Tomescu Gheorghe* (Timişoara) *Tărăbuță C. Paul* (București), *Vasilescu A. Mircea* (Giurgiu) şi *Weiss Leon* (Galați).

I. L.

243 — *Să se arate că în orice triunghiu există relațiunea:*

$$S = p' R,$$

p' fiind semiperimetrul triunghiului ortic.

I. COSEREANU şi M. C. BOBARNAC

In *Culegere de probleme* de *I. Ionescu, G. Țițeicu, A. G. Ioachimescu* şi *V. Cristescu Trigonometria* XIX. 13 se demonstrează că:

$$\frac{p'}{p} = \frac{r}{R}.$$

Dar se ştie că $S = pr$ de unde se deduce relația din enunț.

Au rezolvat foarte bine problema întrebuințând diferite relațiuni cunoscute din geometrie şi trigonometrie d-nii: *Adam I. M., Agapescu M. N., Aldea N., Angelescu N. Tr., Arcadean P. N., Bălean G., Bărglăzan A., Beju O. Tr., Beldie D., Berardo B., Berdan C., Beşchea G. N., Blumenfeld M. D., Botea G. N., Cazacincu A. V., Ciorănescu I. C., Coşniță C., Coşniță Virgil, Dângă S. Vl., Diaconescu V. T.*,

Dorneanu S. V., Dimitrescu A. M., Dumitrescu G. Marin, Epure T. St., Feneşan I., Floria C. Al, Gabrielescu C. V., Gataianţu V. B., Georgescu Jean, Georgescu-Val N. I., Gheorghiu Th. Gh., Gheorghiu-Comăneşti C, Ghimicescu I. Gh., Ghişoiu I. P, Grigorescu L. I, Grofşoreanu I. Gh., Iacob St. E., Ionescu Angelo, Ionescu I. P., Ionescu-Bujor C., Jojea N., Katz P., Lepădatu I. V., Marinescu M. I, Marinescu Tr., Manoil A., Marcovici H., Miclescu Ad, Mihăileanu N. N, Mihăilescu T. R, Mirescu A. P., Miu M. I., Moroianu I. A., Murăroiu I., Musta Şt., Nestor G. D, Nicolau Gh. C., Novacu A. V., Pătroianu I. M, Percea Viorel, Petrulian N., Popa Gh. I., Popea Gh. O., Popovici C. C., Popovici Th. I., Popp I. E., Rădulescu P. Stelian, Răut C., Samoilă D, Scripcă L., Secăroiu D., Silion Gh. I., Simionescn D. Gh., Spacu Gh. P., Sprinceană Gh., Stamatiu M., Stănciulescu G., Stănescu A. N., Ştefănescu Em. Stoica D. A., Süli M, Tărăbuţă C. P., Tăraş V., Tauber Al., Teodorescu N, Udrisky Tr., Vasiliu C. I., Vătăşan G. O., Vlaţiu L. şi Weiss S.

Problema aceasta a fost propusă în Vol. III. în Nr. de la 15 Mai 1923. Această vechime explică de ce între rezolvitorii de acum 13 ani se întâlnesc nume de actuali doctori în matematici, ingineri, profesori, militari etc.

1212. — *Fie* A′ *un punct pe latura* B C *a triunghiului* A B C *şi* B′ *proecţia sa pe* A C. *Perpendicularele în* A′ *şi* B′ *pe* B C *şi* A C *se întâlnesc în* C′.

In ce caz C′ *se află pe* A B?

Fie α, β, γ *proecţiile centrului cercului înscris triunghiului* A B C *pe* B′ C′, C′ A′, A′ B′.

Să se demonstreze că dacă C′ *se află pe* A B, *atunci* 3 *din segmentele determinate de* α, β, γ *pe laturile triunghiului* A′ B′ C′, *sunt egale între ele.*

G L Gh. Buicliu

Soluţie dată de d-l *M. Süli.*

Triunghiurile A B C, A′ B′ C′ având laturile perpendiculare sunt asemeni şi avem:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'B'C'\,;\ \sphericalangle B = B'C'A'\,;\ \sphericalangle C = \sphericalangle C'A'B'.$$

$$\frac{a}{A'C'} = \frac{b}{A'B'}.$$

Dar:

$$A'B' = C\,A' \sin C.$$

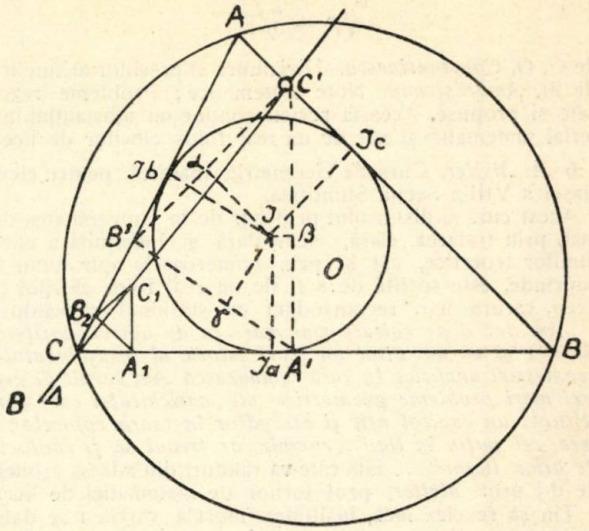
Deci:

$$\frac{a}{A'C'} = \frac{b}{A'C \sin C}.$$

Sau:

$$\frac{A'C'}{A'C} = \frac{a}{b} \sin C = const.,$$

ceia ce arată că triunghiul dreptunghic C A′ C′ rămâne asemeni cu el însuşi; cum C şi direcţiile catetelor sunt fixe vârful C′ va descrie o dreaptă Δ



care trece prin C, iar C′ se află la intersecţia lui A B cu Δ.

Construcţia lui Δ o fac în felul următor: din un punct A_1 de pe C B duc o perpendiculară A_1B_1 pe A C. Dreapta Δ este linia ce uneşte pe C cu C_1, intersecţia perpendicularelor în A_1 şi B_1 pe B C şi C A.

Fie I_a, I_b, I_c proecţiile lui I pe B C, C A, A B. Figurile $I\alpha C' I_c$, $I\beta A' I_a$ sunt dreptunghiuri şi avem:

$$\alpha C' = I I_c = I I_a = \beta A'.$$

La fel:

$$\gamma B' = I I_b = I I_c = \alpha C'$$

$$\alpha C' = \beta A' = \gamma B'.$$

***

1403. — A *şi* B *fiind două numere raţionale, să se stabilească identitatea:*

$$\sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}} = \sqrt[3]{A+\sqrt{B}}.$$

G. G. Constantinescu

Privind identitatea cerută, suntem îndreptăţiţi a căuta să descompunem radicalul cubic din al 2-lea membru într'o sumă de doi radicali simpli, adică a determina două cantităţi x şi y, astfel ca să avem:

$$(1) \qquad \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

Ridicând la cub această relaţie, avem:

$$A+\sqrt{B} = x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right) =$$

$$x+y+3\sqrt[3]{xy}\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}.$$

Egalând părţile raţionale şi iraţionale din cei doi membrii obţinem cu uşurinţă:

$$\begin{cases} x+y = A \\ xy = \left(\dfrac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3. \end{cases}$$

Rezultă de aci că x şi y sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea:

$$z^2 - Az + \left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie obţinem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{2} + \sqrt{\dfrac{A^2}{4} - \left(\dfrac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3} \\ y = \dfrac{A}{2} - \sqrt{\dfrac{A^2}{4} - \left(\dfrac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}, \end{cases}$$

astfel că relaţia (1) se poate scri:

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = \sqrt[3]{\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-\left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}}.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Andronache I. Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Boborodea Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Grumăzescu I. Mircea* (Şc. of. de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Mateiu D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Munteanu Lazăr* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Rosenberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Zagaican I.* (Cond. de Lucrări Publice).

1431. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:*

$$E = 2\cos^2 a \cos b - 2\cos^2 a - \cos^2 b + 1.$$

D-TRU M. SECARA

Având în vedere formulele cunoscute:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

$$\cos p - \cos q = 2\sin\frac{q+p}{2}\sin\frac{q-p}{2},$$

expresiunea dată se poate scri succesiv:

$$E = -2\cos^2 a(1-\cos b) + (1-\cos^2 b) =$$

$$(1-\cos b)(1+\cos b - 2\cos^2 a) =$$

$$2\sin^2\frac{b}{2}(\cos b - \cos 2a) =$$

$$4\sin^2\frac{b}{2}\sin\left(a+\frac{b}{2}\right)\sin\left(a-\frac{b}{2}\right).$$

Soluţii date de d-ra: *Savin Mărioara* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Absolvent, lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iasi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Grabovschi F. Eugen* (Orheiu), *Herman Victor* (student, Cluj), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian* (lic Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoica N. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Tica P. Marin* (Sub-Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1432. — *Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:*

$$\sum \frac{\cos(B-C)}{h_a} = \frac{2}{R},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

CEZAR IVANESCU

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute într'un triunghiu, anume:

$$h_a = 2R\sin B\sin C, \qquad \sum \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = 1,$$

primul membru al relaţiei date se poate scri succesiv:

$$\sum \frac{\cos(B-C)}{h_a} = \sum \frac{\cos B\cos C + \sin B\sin C}{2R\sin B\sin C} =$$

$$\frac{1}{2R}\sum \operatorname{cotg} B \operatorname{cot} C + \frac{3}{2R} = \frac{1}{2R} + \frac{3}{2R} = \frac{2}{R},$$

ceeace invederează existența relației date.

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (absolvent, lic. Buzeşti, Craiova), *Andrunachievici Vl.* (lic. Chişinău), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Gloden A.* (Luxembourg), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N Filipescu), *Stoica D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

1439. — *Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinele ecuaţiei:*

$$(2-m)x^2 - 2mx + m^2 - 3m = 0,$$

să fie una mai mică decât -1 *şi alta mai mare ca 1.*

N. ABRAMESCU

Prima condiţie este ca realizantul ecuaţiei date să fie pozitiv, adică:

$$m^2 - (2-m)(m^2 - 3m) > 0$$

sau:

(1) $$m(m^2 - 4m + 6) > 0.$$

Cum rădăcinele trinomului $m^2 - 4m + 6$ sunt imaginare $(m = 2 \pm i\sqrt{2})$, el este pozitiv pentru orice valoare a lui m, astfel că luând:

(2) $$m > 0,$$

condiţia (1) este satisfăcută.

Acum pentru ca numerele -1 şi $+1$ să fie cuprinse între rădăcinele ecuaţiei date, cum cere problema, trebuie după cum ştim, să avem încă satisfăcute simultan şi relaţiile:

$$\begin{cases} E = (2-m)(m^2 - 2m + 2) < 0 \\ E' = (2-m)(m^2 - 6m + 2) < 0. \end{cases}$$

(A se vedea şi articolul *„Asupra discuţiunei rădăcinelor unei ecuaţii de gradul al 2-lea“* de *N. Abramescu*, din „R. M. T.“ anul IV, pag. 163.)

Factorul $m^2 - 2m + 2$ având rădăcinele imaginare $(m = 1 \pm i\sqrt{7})$, condiţia $E < 0$, este satisfăcută pentru:

(3) $$m > 2,$$

care este de acord cu (2). Trebuie să avem încă satisfăcută, simultan şi condiţia $E' < 0$. Rădăcinele ecuaţiei $E' = 0$, aranjate în ordine de mărime sunt:

$$m_1 = 3 - \sqrt{7}, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3 + \sqrt{7},$$

astfel că pentru ca să avem $E' < 0$, trebuie ca:

$$3 - \sqrt{7} < m < 2, \quad \text{sau} \quad m > 3 + \sqrt{7}.$$

Dar numai $m > 3 + \sqrt{7}$, este de acord cu condiţiile (2) şi (3). Aşa dar, numai pentru:

$$m > 3 + \sqrt{7},$$

avem soluţionată problema propusă.

Soluţii date de d-nii: *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Dobrin Virgil* (lic Milit., Tg-Mureş), *Herman Victor* (student, Cluj), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Rosemberg Israel* (lic. Roman) şi *Ţarălungă D-tru* (lic Milit., Tg-Mureş).

1441. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare, ştiind că are cifra doua şi ultima identice, iar suma lor este prima cifră a patratului căutat.*

D-TRU D. MATEIU

Conform enunţului, patratul cerut este de forma:

$$a\,b\,c\,b,$$

unde trebuie să avem:

(1) $$a = 2b,$$

b fiind terminaţie de patrat perfect, iar a fiind de o singură cifră, suntem îndreptăţiţi să luăm numai:

$$b = 1, \quad \text{sau} \quad b = 4,$$

pentru a fi satisfăcută şi condiţia (1).

Rezultă de aci, că patratul cerut este de forma:

(2) $$21\,c\,1, \quad \text{sau} \quad 84\,c\,4.$$

Rădăcinele patrate a acestor numere, n'ar putea fi, respectiv, de cât:

$$41, \quad 49; \quad 92, \quad 98.$$

Cum:

$$41^2 = 1681, \quad 49 = 2401;$$

$$92 = 8464, \quad 98^2 = 9604,$$

se observă că numai 8464, care este de forma $84\,c\,4$, convine.

Patratul cerut în condiţiile problemei este astfel:

$$8464 = 92^2.$$

Au soluţionat problema, însă prin mai multe încercări, d-ra: *Savin Mărioara* şi d-nii: *Amărăscu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Florescu L, Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Negulescu Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Panait Mircea* (Sub-Lt.), *Rajka Z.* (Orăştie), *Rosenberg Israel* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L P).

1444. — *Să se rezolveze sistemul:*

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^3y^3(x+y)=a \\ x^3y(y+1)+y^3x(x+1)+2x^2y^2=b. \end{cases}$$

ION MARGINEANU

Sistemul dat se mai poate scri sub forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x+y)^3+x^3y^3=a \\ xy(x+y)(xy+x+y)=b. \end{cases}$$

Dacă notăm pentru prescurtare:

$$(2)\qquad x+y=u,\quad xy=v,$$

sistemul (1) devine:

$$(3)\qquad \begin{cases} u^3+v^3=a \\ uv(u+v)=b. \end{cases}$$

Adunând la prima ecuaţie din (3), ecuaţia 2-a înmulţită cu 3, obţinem:

$$(u+v)^3=a+3b.$$

De aci deducem:

$$(4)\qquad u+v=A_k,\quad (k=1,2,3),$$

unde am notat pentru prescurtare:

$$(5)\qquad A_1=\sqrt[3]{a+3b},\quad A_2=\alpha\sqrt[3]{a+3b},\quad A_3=\alpha^2\sqrt[3]{a+3b},$$

unde $\sqrt[3]{a+3b}$ este numai rădăcina aritmetică, iar 1, α, α^2 sunt rădăcinele cubice ale unităţei (adică rădăcinele unei ecuaţii de forma $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)=0$, cu rădăcinele 1, $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i=\sqrt{-1}$).

In virtutea relaţiilor (4), sistemul (3) este echivalent cu următoarele:

$$(6)\qquad \begin{cases} u+v=A_k \\ uv=\dfrac{b}{A_k} \end{cases} \qquad (k=1,2,3).$$

Rezultă de aci că u şi v sunt rădăcinele ecuaţiilor:

$$z^2-A_kz+\frac{b}{A_k}=0,$$

sau:

$$A_kz^2-A_k^2z+b=0. \qquad (k=1,2,3)$$

Rezolvind această ecuaţie, găsim că sistemul (6), admite următoarele sisteme de soluţii:

$$(7)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{A_k^2+\sqrt{A_k^4-4bA_k}}{2}=B_k \\ v=\dfrac{A_k^2-\sqrt{A_k^4-4bA_k}}{2}=C_k \end{cases}$$

şi:

$$(8)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{A_k^2-\sqrt{A_k^4-4bA_k}}{2}=C_k \\ v=\dfrac{A_k^2+\sqrt{A_k^4-4bA_k}}{2}=B_k \end{cases} \qquad (k=1,2,3).$$

Odată aflate aceste sisteme de soluţii $(u\,v)$, privim relaţiile de substituţie (2) şi conchidem că sistemul dat este echivalent cu următoarele şase sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y=B_k \\ xy=C_k, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=C_k \\ xy=B_k \end{cases} \qquad (k=1,2,3).$$

Aceste sisteme ne îndreptăţesc să spunem că x şi y sunt rădăcinele ecuaţiilor de gradul al 2-lea:

$$w^2-B_kw+C_k=0 \text{ şi } w^2-C_kw+B_k=0,$$
$$(k=1,2,3),$$

care rezolvate, ne dau următoarele 12 sisteme de soluții, pentru sistemul de ecuații dat, care scrise concentrat, sunt:

$$\begin{cases} x = \dfrac{B_k + \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2} \\ y = \dfrac{B_k - \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{B_k - \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2} \\ y = \dfrac{B_k + \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_k + \sqrt{C_k^2 - 4B_k}}{2} \\ y = \dfrac{C_k - \sqrt{C_k^2 - 4B_k}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{C_k - \sqrt{C_k^2 - 4B_k}}{2} \\ y = \dfrac{C_k + \sqrt{C_k^2 - 4B_k}}{2} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, 3),$$

unde B_k, C_k trebuesc înlocuiți cu valorilor lor din (7), A_k având valorile date în (5).

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Andrunachievici Vl.* (lic. Chişinău), *Marica Horia* (lic. Cluj), *Mateiu D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu I. Gavrilă* (bacaulareat) şi *Ţarălungă D-tru* (lic Milit., Tg.-Mureş).

PROBLEME PROPUSE

1521. — Să se găsească patratul perfect $a\,b\,c\,a$, format din cifre însemnătoare, în care $a\,b$ şi $c\,a$ sunt patrate perfecte.

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

1522. — Se cer patratele perfecte de forma $a\,b\,c\,d\,e\,f$ în care a, b, f sunt în progresie geometrică crescătoare, iar c, d, e sunt în progresie aritmetică crescătoare.

GH. CORNELIU LUPESCU

1523. — Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} = a^2$$
$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[8]{16\,xy} = b,$$

ştiind că, $a^2 + b^2 = 2\,b\,c$.

MARCEL F. AMARASTEANU

1524. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^4 y + 8\,x y^4 = 32 \\ (x + 2\,y)^2 - 6\,x\,y = 4\,. \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

1525. — Un cerc de rază constantă se mişcă într'un plan dat în jurul unui punct fix al său. Se cere să se găsească locul geometric al punctului de tangență al cercului cu o tangentă de direcție dată.

G-L GH. BUICLIU

1526. — Două cercuri (O) şi (O_1) se taie în A şi B; tangenta în A la (O) taie pe (O_1) în C; un cerc arbitrar dus prin B taie cercul (O) în P, pe (O_1) în Q şi pe CQ în R. Punctele A, P, R sunt colineare.

N. N. MIHAILEANU

1527. — Să se arase că într'un triunghiu oarecare avem:

$$m(m - 1)\sin A + m(\sin B - \sin C) + \sin C \geqq 0,$$

oricare ar fi m real.

L-T. C. IONESCU-ŢIU

1528. — Să se stabilească că într'un triunghiu oarecare există următoarele identități:

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2\,b\,c \sin(B - C)$$

$$a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2\,b\,c \cos(B - C)$$

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2(B - A) =$$
$$2\,b\,c \sin(2B - A).$$

Nu se vor folosi cunoştinţe din articolul din prezentul număr:

V ALACI

BIBLIOTECA ... STRA...
SIBIU

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăşteanu F. Marcel (P., 1513, 1517, 1519, 1520), *Anastasie Petrescu-Craiovița* (1465, 1468, 1470, 1473, 1476, 1479, 1480, 1484, 1487, 1488, 1491, 1494, 1503, 1510), *Apostol Radu* (P., 1456, 1463, 1487, 1494, 1500), *Babeţiu Corneliu* (1471, 1495, 1513, 1515, 1517, 1520), *Berinde L. Titus* (P., 1433, 1440, 1465, 1491, 1497), *Cazanacli V. Petre* (1472, 1473, 1476, 1477, 1479, 1480, 1487, 1488), *Comloşan V. Cornelia* (1479, 1480, 1488, 1517), *Constantinescu Vasile* (1484), *Florescu L. Victor* (1392, 1409, 1427, 1429, 1463, 1466, 1480, 1491, 1494), *Herman Victor* (P., 1405, 1406, 1433, 1445, 1446, 1452, 1463, 1476), *Jidanu C-tin* (P., 1425, 1426, 1441, 1449, 1468, 1472, 1473, 1484, 1491, 1513, 1517), *Kornis Ernest* (1513, 1514, 1517, 1518, 1520), *Lăzărescu Stelian* (1475, 1506), *Mateiu D. D-tru* (1371, 1402, 1476, 1484, 1487, 1510, 1512, 1513, 1515, 1516, 1517, 1519), *Negulescu D. Ştefan* (P., 1426, 1471, 1494, 1506, 1516, 1517, 1520), *Negulescu Victor* (1476, 1487, 1494), *Pasere Emil* (1465, 14661468, 1470, 1484, 1488), *Popoviciu I. Gavrilă* (N. P., 1281, 1292, 1300, 1319, 1385, 1431, 1435, 1441, 1447, 1448, 1449, 1451, 1452, 1453, 1456, 1462, 1463, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471), *Ripianu Andreiu* (1472, 1482, 1489, 1491, 1503, 1508), *Rosenberg I.* (1456, 1464, 1494, 1513, 1520), *Stefănescu Costin* (1487, 1488), *Stefănescu D. Nicolae* (1516, 1517), *Stoian S. Ioan* (1520), *Tica, P. Marin* (1462, 1470, 1476, 1484, 1488, 1503, 1513, 1519, 1520), *Vlad I. C. M.* (1475, 1480, 1488, 1517),

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1936.

Costul *special* a unui abonament fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina, şi sunt abonaţi la ea din ţară de la noi, d-nii: Ing. *I. S. Antoniu;* Prof. *G. G. Constantinescu;* Locot. *F. Ionescu-Ţiu;* Prof. *N. N. Mihăileanu*; Prof. *I. Nemeţ;* Dr. *P. Sergescu*; Asist. Univ. *T. Vescan* şi Locot-Comandor *Gr. Zapan.*

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

ANUL XVI. 15 NOEMVRIE 1936 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNILE INTREGI ALE ECUATIUNEI $x^2 \pm y^2 = a\,10^n$.
2. NOTE MATEMATICE: 17, 18.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 527, 628, 1426, 1433, 1434, 1440.
6. PROBLEME PROPUSE: 1529-1536.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Noemvrie 1936 mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi d-nul *I. Curea,* profesor de matematici la liceul din Lugoj.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMVRIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SOLUȚIUNILE ÎNTREGI ALE ECUAȚIUNEI $x^2 \pm y^2 = a \cdot 10^n$

DE PROF. GH. CONSTANTINESCU

Soluțiunile acestei ecuațiuni diferă, după cum luăm semnul + sau —, așa că trebue să le studiem pe fie-care în parte.

I.

In ecuația $x^2 + y^2 = a \cdot 10^n$, înlocuim pe a cu factorii din care se compune și ecuația va deveni:

$$x^2 + y^2 = 2^k \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \ldots \alpha_l^{\lambda_l} \beta_1^{\mu_1} \beta_2^{\mu_2} \cdots \beta_r^{\mu_r},$$

unde α_i sunt numere prime de forma $4s+1$, iar β_i de forma $4s-1$.

Soluțiunile acestei ecuațiuni le vom împărți în două părți, unele care sunt prime între ele, pe care le vom numi soluțiuni proprii, iar altele, care au un divizor comun, pe care le vom numi improprii.

Se vede, cum că divizorul comun al soluțiunilor improprii, ridicat la pătrat, va fi divizorul lui $a.10^n$.

In teoria numerilor se dovedește că, dacă α_1 este prim și de forma $4s+1$, ecuația $x^2+y^2=\alpha_1$ are o singură soluțiune (x_1, y_1), care nu se poate găsi decât prin încercări, iar dacă α_1 este prim de forma $4s-1$, ecuațiunea $x^2+y^2=\alpha_1$ nu are soluțiuni.

Dacă (x_1, y_1) este soluția ecuației $x^2+y^2=\alpha_1$, atunci $(x_1 \beta_1^p,\ y_1 \beta_1^p)$ va fi singura soluție improprie a ecuației $x^2+y^2=\alpha_1 \beta_1^{2p}$, în cazul când β_1 este de forma $4s-1$, iar dacă ecuația este de forma:

$$x^2 + y^2 = \alpha_1 \beta_1^{2p+1},$$

atunci nu va avea nici o soluție.

Rezultă că ecuația propusă nu va avea soluțiuni în cazul când cel puțin unul din exponenții μ_i va fi impar, iar în cazul când toți exponenții μ_i ar fi pari, ecuația va avea numai soluțiuni improprii. Ecuația va avea și soluțiuni proprii, numai în cazul când $k=1$ și $\mu_i=0$.

Odată arătate aceste proprietăți generale, să luăm câte-va cazuri particulare și apoi să deducem soluțiuni și în cazul general:

1. *Să se rezolve ecuația:*

$$x^2 + y^2 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l,$$

unde α_i sunt numere prime de forme $4s+1$ și unde se cunosc soluțiunile ecuațiilor:

$$x^2 + y^2 = \alpha_i,$$

pe care să le însemnăm cu (x_i, y_i).

Din înmulțirea următoarelor egalități:

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha_1 \quad \text{și} \quad x_2^2 + y_2^2 = \alpha_2,$$

găsim:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 \pm y_1 y_2)^2 + (x_2 y_2 \mp y_2 x_1)^2 = \alpha_1 \alpha_2.$$

Rezultă că ecuația $x^2+y^2=\alpha_1\alpha_2$, are două soluțiuni:

$$\begin{cases} x_{2,1} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ y_{2,1} = x_2 y_1 - y_2 x_1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x_{2,2} = x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ y_{2,2} = x_2 y_1 + y_2 x_1 \end{cases}$$

Din înmulțirea fie căruia din următoarele două egalități:

$$x_{2,1}^2 + y_{2,1}^2 = \alpha_1 \alpha_2, \qquad x_{2,2}^2 + y_{2,2}^2 = \alpha_1 \alpha_2$$

cu $x_3^2 + y_3^2 = \alpha_3$, găsim că ecuația $x^2+y^2=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ are 4 soluțiuni.

In același mod continuăm și găsim că ecuația $x^2 - y^2 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l$ are 2^{l-1} soluțiuni proprii.

2. *Să se rezolve ecuația:*

$$x^2 + y^2 = \alpha_1^{\lambda_1}.$$

Din ridicarea la patrat a egalității $x_1^2 + y_1^2 = \alpha_1$ găsim:

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 = (x_1^2 \pm y_1^2)^2 + (x_1 y_1 \mp x_1 y_1)^2 = \alpha_1^2,$$

din care rezultă că ecuaţia $x^2+y^2=\alpha_1^2$ are două soluţii, una proprie:

$$\begin{cases} x_2=x_1^2-y_1^2 \\ y_2=2x_1y_1 \end{cases}$$

şi alta improprie $x_1^2+y_1^2$, 0.

Din înmulţirea egalităţei $x_2^2+y_2^2=\alpha_1^2$, cu $x_1^2+y_1^2=\alpha_1$, găsim:

$$(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)=(x_2x_1\pm y_2y_1)^2+$$
$$(x_1y_2\mp y_1x_2)^2=\alpha_1^3.$$

Rezultă că ecuaţia:

$$x^2+y^2=\alpha_1^3,$$

are două soluţii, una proprie:

$$\begin{cases} x_3=x_1(x_1^2-3y_1^2) \\ y_3=y_1(3x_1^2-y_1^2) \end{cases}$$

şi alta improprie:

$$\begin{cases} x_3=\alpha_1x_1 \\ y_3=\alpha_1y_1 \end{cases}$$

Continuând tot aşa găsim că ecuaţia:

$$x^2+y^2=\alpha_1^{\lambda_1}$$

are o singură soluţie proprie, pe care o însemnăm cu $(x_{\lambda_1}, y_{\lambda_1})$ şi soluţiuni improprii:

$$\begin{cases} x_{\lambda_1-2i}\,\alpha_1^{2i} \\ y_{\lambda_1-2i}\,\alpha_1^{2i}, \end{cases}$$

unde $(x_{\lambda_1-2i},\ y_{\lambda_1-2i})$ sunt soluţiile proprii ale ecuaţiuni:

$$x^2+y^2=\alpha_1^{\lambda_1-2i}.$$

3. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^2+y^2=2^k.$$

Numărul 2 nu este de forma $4s+1$, deci el ar trebui să nu dea soluţii improprii pentru ecuaţia:

$$x^2+y^2=2^k$$

de cât în cazul când $k=2k'$, însă el singur face excepţie şi anume când $k=2k'$, ecuaţia are o singură soluţie improprie $(x=2^k,\ y=0)$, iar în cazul când $k=2k'+1$, are de asemeni o singură soluţie improprie $(x=y=2k')$.

4. *Să se rezolve ecuaţia în cazul general:*

$$x^2+y^2=2^k\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\ldots\alpha_l^{\lambda_l}\beta_1^{2\mu_1}\beta_2^{2\mu_2}\ldots\beta_\varepsilon^{2\mu_r}.$$

Luăm mai întâi ecuaţia:

$$x^2+y^2=\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\ldots\alpha_l^{\lambda_l}$$

şi cu câte o soluţie a ecuaţilor $x^2+y^2=\alpha_i^{2i}$ găsim ca în 1. toate soluţiile acestei ecuaţii, apoi dacă însemnăm cu (X, Y) o asemenea soluţie, atunci:

$$\begin{cases} X=\beta_1^{\mu_1}\cdots\beta_r^{\mu_2}2^{k'}x \\ Y=\beta_1^{\mu_1}\cdots\beta_r^{\mu_2}2^{k'}y \end{cases}$$

când $k=2k'$, va fi o soluţie a ecuaţiei generale şi:

$$\begin{cases} X=\beta_1^{\mu_1}\cdots\beta_r^{\mu_2}2^{k'}(x+y) \\ Y=\beta_1^{\mu_1}\cdots\beta_r^{\mu_2}2^{k'}(x-y), \end{cases}$$

când $k=2k'+1$, va fi soluţie a ecuaţiei generale.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2+y^2=a\,.\,10^n,$$

când a este de o singură cifră.

Numerile prime de o singură cifră şi de forma $4s+1$ sunt numai 1 şi 5, deci numai pentru $a=1$, 2, 5 vom avea pe lângă soluţiuni improprii şi soluţiuni proprii, iar pentru $a=4$, 9 vom avea numai soluţiuni improprii, cari se obţin din soluţiunile proprii când $a=1$ înmulţite respectiv cu 2 şi 3.

Pentru $a=1$ găsim următoarele soluţiuni proprii până la $n=20$.

$10 = 3^2+1$
$10^2 = 8^2+6^2$
$10^3 = 26^2+18^2$
$10^4 = 96^2+28^2$
$10^5 = 316^2+12^2$
$10^6 = 936^2+352^2$
$10^7 = 1992^2+2456^2$
$10^8 = 8432^2+5376^2$
$10^9 = 30672^2+7696^2$
$10^{10} = 99712^2+7584^2$
$10^{11} = 291552^2+124464^2$
$10^{12} = 752192^2+658844^2$
$10^{13} = 2729024^2+1597632^2$
$10^{14} = 9784704^2+2063872^2$
$10^{15} = 31417984^2+3593088^2$
$10^{16} = 90660864^2+42197248^2$
$10^{17} = 217252608^2+229785344^2$
$10^{18} = 881543168^2+472103424^2$
$10^{19} = 3116732928^2+534767204^2$
$10^{20} = 9884965888^2+1512431626^2$

Soluţiunile improprii se găsesc din soluţiunile proprii pe cari să le însemnăm cu (x_{n-2i}, y_{n-2i}) îmulţite respectiv cu 10^i.

Pentru $a=2$. In acest caz punem $a=1^2+1^2$, iar dacă însemnăm cu (x, y) o soluţie găsită pentru $a=1$, vom avea ca soluţii pentru $a=2$ pe:

$$\begin{cases} X=x+y \\ Y=x-y. \end{cases}$$

Pentru $a=5$. Punem $a=2^2+1=5$ şi soluţiile pentru acest caz vor fi:

$$\begin{cases} X=2x\pm y \\ Y=x\mp 2y, \end{cases}$$

un'e (x, y) este o soluţie oarecare pentru $a=1$.

II

Rezolvarea ecuaţiei:

$$x^2-y^2=a\,10^n.$$

Descomponem pe a şi 10^n în factori primi, vom avea:

$$x^2-y^2=2^\alpha.5^\beta m_1^{\lambda_1}\ldots m_l^{\lambda_l},$$

unde m_i sunt numere prime impare.

Dacă p şi q sunt 2 factori, astfel ca să avem $a.10^n=p.q$, putem descompune ecuaţia în:

$$x-y=q$$
$$x+y=p,$$

din care deducem:

$$x=\frac{p+q}{2} \quad \text{şi} \quad y=\frac{p-q}{2}.$$

Pentru ca x şi y să fie întregi, trebuie ca p şi q să fie de aceiaşi paritate.

Rezultă deci, că ecuaţia nu va avea soluţii întregi, când $\alpha=1$, în toate celelalte cazuri va avea soluţii întregi. Vom rezolva ecuaţia în câte-va cazuri particulare şi apoi vom deduce soluţia în cazul general:

1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^2-y^2=2^\alpha.$$

Ecuaţia o descompunem în:

$$x-y=2^i$$
$$x+y=2^{\alpha-i},$$

din care deducem:

$$(x, y)=2^{i-1}(2^{\alpha-2i}\pm 1)$$

unde $i=1, 2, 3\ldots, E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

E însemnând numărul întreg cuprins în $\frac{\alpha}{2}$.

Toate aceste soluţii sunt improprii, afară de una, care se obţine făcând pe $i=1$, care este proprie.

In acelaş mod găsim şi soluţiunile ecuaţiunilor $x^2-y^2=5^\beta$ şi $x^2-y^2=m_i^{\lambda i}$, cari sunt:

$$(x, y)=\frac{5^k(5^{\beta-2k}\pm 1)}{2}$$

şi

$$(x, y)=\frac{m_i^k(m_i^{\lambda i-2k}\pm 1)}{2}.$$

2. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^2-y^2=2^\alpha.5^\beta.$$

Dacă (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sunt câte o soluţie a ecuaţiunilor:

$$x^2-y^2=2^\alpha \quad \text{şi} \quad x^2-y^2=5^\beta$$

din îmulţirea egalităţilor:

$$x_1^2-y_1^2=2^\alpha \quad \text{şi} \quad x_2^2-y_2^2=5^\beta,$$

găsim:

$$(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)=(x_1x_2\pm y_1y_2)^2-$$
$$(x_1y_2\pm y_1x_2)^2=2^\alpha.5^\beta,$$

de unde deducem că:

$$(x, y)=5^k.2^{2-1}(2^{\alpha-2i}5^{\beta-2k}\pm 1)$$
$$(x, y)=5^k.2^{2-1}(5^{\beta-2k}\pm 2^{\alpha-2i}),$$

sunt soluţiile generale ale ecuaţiunii date.

3. In cazul general, cu o soluţie a ecuaţiei $x^2-y^2=2^\alpha.5^\beta$ şi cu o soluţie a ecuaţiei $x^2-y^2=m_i^{\lambda i}$, găsim ca mai sus, soluţiile ecuaţiei $x^2-y^2=2^\alpha.5^\beta m_i^{\lambda i}$ şi continând aşa mai departe, găsim toate soluţiile ecuaţiunei date.

Aplicaţie. Să găsim toate soluţiile ecuaţiei $x^2-y^2=a.10^n$, *unde* $a<10$.

Această interesantă problemă, a fost studiată parţial în *„Gazeta Matematică“* de 3 persoane diferite şi anume; D-l Prof. *I. Ionescu* studiază soluţiunile acestei probleme în cazul când:

$$x<\sqrt{10^{n+1}} \quad \text{şi} \quad y>\sqrt{10^n}.$$

Soluţiunile găsite le numeşte D-sa *patrate gemene* şi sunt de forma:

$$145^2 = 21025$$
$$105^2 = 11025.$$

D-l *E. Ştefănescu* studiază soluţiile când:

$$x < \sqrt{10^{n+1}} \quad \text{şi} \quad y < \sqrt{10^n},$$

soluţiuni numite de D-sa *patrate decapitate* şi sunt de forma:

$$3125^2 = 9765625$$
$$875^2 = 765625$$

şi în fine D-nul G-l *Gh. Buicliu* studiază soluţiile când $x > \sqrt{10^{n+1}}$, o parte din aceste soluţiuni, cari sunt de forma:

$$629^2 = 395641$$
$$621^2 = 385641$$

le numeşte D-sa *patrate pseudo-gemene.*

Problema fiind studiată de 3 persoane diferite, aplicând metode diferite, pare complicată şi chiar *patratele pseudo-gemene* nu au fost separate de celelalte soluţiuni ale problemei. In cele ce urmează voiu simplifica soluţiile acestei probleme.

De la început remarcăm, că *patratele decapitate,* pot fi considerate ca *patrate gemene*, dacă convenim că putem să punem zero la stânga unui număr.

Să cercetăm forma celorlalte soluţiuni, cari nu sunt nici *gemene* nici *pseudo-gemene.*

Pentru ca diferenţa între x^2 şi y^2 să fie egală cu $a \cdot 10^n$, trebue neapărat ca ultimile n cifre din x^2 şi y^2 să fie aceleaşi, iar cifrele de ordinul $n+1$ să fie diferite.

Să le însemnăm cu b şi b' şi dacă $b > b'$, avem neapărat *patrate pseudo-gemene*, iar dacă $b < b'$ trebue ca cifrele de ordinul $n+2$ din x^2 şi y^2 să fie c şi $c' = c-1$, iar cele de ordine mai mari ca $n+1$ să fie aceleaşi.

In acest caz soluţiunile au două cifre diferite, care sunt de forma c, b şi $c-1$, b'. Se poate întâmpla ca $c=0$, atunci c' este egal cu 9 şi cifrele de ordinul $n+3$ din x^2 şi y^2 sunt de forma d şi $d-1$.

In acest caz pătratele au 3 cifre diferite şi sunt de forma:

$$d,\ 0,\ b \quad \text{şi} \quad d-1,\ 9\ .\ b'.$$

Continuând tot aşa, găsim, că soluţiile au partea diferită de forma:

$$m,\ 0,\ 0,\ 0\ 0\ \ldots\ b$$

şi

$$m-1,\ 9\ 9\ 9\ 9\ \ldots\ b'.$$

Să numim toate aceste soluţiuni *patrate pseudo-gemene* de specia 2-a, rămânând *patratele pseudo-gemene* cu o cifră diferită, de specia întâi.

Rezultă că soluţiunile ecuaţiunei $x^2 - y^2 = a\ 10^n$ sunt de 3 feluri: *gemene, pseudo-gemene de specia întâi* şi *pseudo-gemene de specia a doua.*

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

16. A. — *Sur une relation quintigrade.*

Nous avons établi dans „*Gazeta Matematică*", 1936, page 479, qu'une solution générale en nombres entiers du système:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 2a^4 \end{cases}$$

est donnée par:

$$\begin{cases} a = u^2 + 3 \\ b = u^2 - 2u - 3 \\ c = u^2 + 2u - 3 \\ d = 4u\ . \end{cases}$$

Dans „*Gazeta Matematică*" 1936, page 625, M. G. donne la solution plus générale que voici:

$$\begin{cases} a = \pm k(u^2 + 3u'^2) \\ b = \pm k(u^2 - 2uu' - 3u'^2) \\ c = \pm k(u^2 + 2uu' - 3u'^2) \\ d = \pm k(4uu')\ . \end{cases}$$

Nous considérons seulement les solutions pour lesquelles $k = 1$.

On déduit, de cette solution, d'après un théorème général, la relation quintigrade:

$$2(x-a)^p + 2(x+a)^p + 2x^p =$$
$$(x-b)^p + (x+b)^p + (x-c)^p + (x+c)^p + (x-d)^p + (x+d)^p,$$

$p = 1, 2, 3, 4, 5$, x est un entier arbitrairement choisi.

Exemple numérique.

De: $2.7^2 = 3^2 + 5^2 + 8^2$

$2.7^4 = 3^4 + 5^4 + 8^4$

on tire, en faisant $x = 8$, la relation:

$$2.1^p + 2.15^p + 2.8^p = 5^p + 11^p + 3^p + 13^p + 16^p$$

$$p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Vérification:

$$\Sigma_1 = 48$$
$$\Sigma_2 = 580$$
$$\Sigma_3 = 7776$$
$$\Sigma_4 = 109.444$$
$$\Sigma_5 = 1.584.288.$$

B. *Solution générale du système diophantien:*

$$\begin{cases} b^2 + c^2 + d^2 = 2a^4 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 2a^8. \end{cases}$$

Posons, à cet effet, $a = u^2 + 3u'^2 = (u+v)^2$.

On en déduit $u = \dfrac{3u'^2 - v^2}{2v}$, puis:

$$\begin{cases} a = \dfrac{(3u'^2 + v^2)^2}{4v^2} \\ b = \dfrac{9u'^4 + v^4 - 18u'^2v^2 - 12u'^3v + 4u'v^3}{4v^2} \\ c = \dfrac{9u'^4 + v^4 - 18u'^2v^2 + 12u'^3v - 4u'v^3}{4v^2} \\ d = \dfrac{8u'v(3u'^2 - v^2)}{4v^2}. \end{cases}$$

On a donc une solution entière en multipliant chacune de ces valeurs par $4v^2$.

Exemples numériques:

$$\begin{cases} 2.7^4 = 39^2 + 55^2 + 16^2, & (4802) \\ 2.7^8 = 39^4 + 55^4 + 16^4, & (11.529.602) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.13^4 = 15^2 + 161^2 + 176^2, & (57122) \\ 2.13^8 = 15^4 + 161^4 + 176^4, & (1.631.461.442) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\ 19^4 185^2 + 231^2 + 416^2, & (260.642) \\ 2.19^8 = 185^4 + 231^4 + 416^4, & (33.967.126.082). \end{cases}$$

A. GLODEN
(Luxembourg)

18. — *Generalizarea prob'emei 1426.*

Să se afle patratele perfecte, egale cu suma patratelor a două numere consecutive.

Fie x şi $x+1$ două numere consecutive. Conform enunţului trebuie să avem:

(1) $$x^2 + (x+1)^2 = y^2.$$

Această relaţie multiplicată cu 4 se mai poate scri:

$$(2y)^2 - 2(2x+1)^2 = 2,$$

unde notând:

(2) $$2y = z, \qquad 2x + 1 = t,$$

obţinem:

(3) $$z^2 - 2t^2 = 2.$$

Trebuie întâi să soluţionăm în numere întregi această ecuaţie.

In acest scop vom folosi unele rezultate dintr'un articol interesant al d-lui profesor *G. Constantinescu*[1] anume:

Soluţiile întregi ale unei ecuaţii de forma:

(4) $$x^2 - ay^2 = b,$$

sunt:

(4') $$\begin{cases} x = ux_1 \pm avy_1 \\ y = uy_1 \pm vx_1, \end{cases}$$

(x_1, y_1) *fiind o soluţie particulară a ecuaţiei* (4), *iar* (u, v) *fiind o soluţie oarecare a ecuaţiei:*

(5) $$u^2 - av^2 = 1.$$

Tot în acest articol se arată: *dacă* b *este prim* (*cazul nostru*) *şi* (u, v) *din* (4') *se înlocuesc pe rând cu toate soluţiile* (u_i, v_i) *a ecuaţiei* (5'), *se obţin toate soluţiile* (x_i, y_i) *ale ecuaţiei* (4).

Mai amintesc din articolul menţionat, cum se pot obţine toate soluţiile (u_i, v_i) ale ecuaţiei (5), anume: *dacă* (u_1, v_1) *este o soluţie particulară a ecuaţiei* (5), *cea mai mică în numere pozitive, atunci a 2 a soluţie este:*

(5') $$\begin{cases} u_2 = 2u_1^2 - 1 \\ v_2 = 2u_1 v_1, \end{cases}$$

iar cele următoare sunt:

(5'') $$\begin{cases} u_3 = 2u_1u_2 - u_1 \\ v_3 = 2u_1v_2 - v_2, \end{cases} \cdots \begin{cases} u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2} \\ v_n = 2u_1v_{n-1} - v_{n-2}, \end{cases}$$

[1]) *G. Constantinescu. Soluţiuni întregi ale ecuaţiunei* $x^2 - ay^2 = b$, publicat în „*Revista Matematică din Timişoara*", anul XVI-lea, N-rile 1 şi 2, 1936.

obținându-se în felul acesta toate soluțiile ecuației (5).

Aceste cunoștinți amintite, să le folosim pentru soluționarea în numere întregi a ecuației (3) și apoi a ecuației (1).

In prealabil, observând că (2, 1) este o soluție particulară a ecuației (3), rezultă conform lui (4′) că soluția ei generală este:

$$(3') \qquad \begin{cases} z = 2u \pm 2v \\ 1 = u \pm 2v, \end{cases}$$

(u, v) fiind o soluție particulară a ecuației:

$$(6) \qquad u^2 - 2v^2 = 1.$$

Inlocuind valorile din (3′) ale lui z și t în (2), deducem cu ușurință:

$$(1') \qquad \begin{cases} y = u \pm v \\ x = \dfrac{u-1}{2} \pm v, \end{cases}$$

o soluție a ecuației (1). Pentru a afla toate soluțiile întregi (y, x) ale ecuației (1), este suficient, după cele arătate, a afla întâi toate soluțiile întregi ale ecuației (6).

Cum:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ v_1 = 2 \end{cases}$$

este cea mai mică soluție pozitivă a ecuației (6), rezultă după cele arătate, că toate celelalte soluții ale ei sunt date de (5′) și (5″), adică:

$$\begin{cases} u_2 = 2u_1^2 - 1 = 17 \\ v_2 = 2u_1 v_1 = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3 = 2u_1u_2 - u_1 = 99 \\ v_3 = 2u_1v_2 - v_1 = 70, \end{cases} \quad \ldots$$

soluții care se pot scri în următorul tablou:

u	3	17	99	577	3363	19601	114243	665857	. . .
v	2	12	70	408	2378	13860	80782	470832	. . .

Inlocuind pe rând aceste soluții (u, v) în (1′), găsim corespunzător toate soluțiile întregi ale ecuației (1); ele sunt asezate în ordinea de mărime a lui y:

y	1	5	5	29	29	169	169	985
x	−1	3	−4	20	−21	119	−120	696

y	985	5741	5741	33461	33461	195025	. . .
x	−697	4059	−4060	23660	−23661	137903	. . .

Acest tablou conține toate soluțiile ecuației (1), *adică toate numerile a căror patrat este suma patratelor a două numere consecutive, avem astfel:*

$$\begin{aligned}
1^2 &= (-1)^2 + 0 \\
5^2 &= 3^2 + 4^2 \\
5^2 &= (-4)^2 + 3^2 \\
29^2 &= 20^2 + 21^2 \\
29^2 &= (-21)^2 + 20^2 \\
169^2 &= 119^2 + 120^2 \\
169^2 &= (-120)^2 + 119^2 \\
985^2 &= 696^2 + 697^2 \\
985^2 &= (-697)^2 + 696^2 \\
5741^2 &= 4059^2 + 4060^2 \\
5741^2 &= (-4060)^2 + 4059^2 \\
33461^2 &= 23660^2 + 23661^2 \\
33461^2 &= (-23661)^2 + 23660^2 \\
195025^2 &= 137903^2 + 137904^2.
\end{aligned}$$

. . . . . .

Relația: $29^2 = 20^2 + 21^2 = 841$, ne dă soluția problemei 1426.

Observare. A se vedea și rezultatele găsite pe cale empirică de d-l *Adrian Popescu,* în nota No. 3, din „R. M. T., anul XVI, No. 2, 1936.

V. ALACI

CHESTIUNI DE EXAMEN
ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA.

Examen de intrare în anul pregătitor Octomvrie 1936.

GEOMETRIE.

I.

Fie cercul fix O și punctul fix C exterior lui. Ducem secanta C B A și tangenta C D la cercul O. Cercul C B D taie pe A D în E Să se arate că:

a) Dreapta C E este tangentă cercului A B E;

b) Tangentele C D și C E sunt egale.

Să se găsească, când secanta C B A se rotește în jurul punctului fix C:

c) Locul punctului E;

d) Locul punctului M de intersecție al dreptelor A O și C E.

II.

In paralelogramul A B C D ($\overline{AB} < \overline{BC}$) luăm dela vârfurile opuse A și C către al treilea vârf, de exemplu către

B, segmentele A E şi C F, respectiv pe laturile A B şi C B, şi egale cu diferenţa laturilor B C şi A B. Dacă G este punctul de întâlnire al dreptelor A F şi C E, să se arate că dreapta D G este perpendiculară pe A F. (Indicaţie: Prin punctul G ducem o paralelă la latura B A . . .).

(20 Octomvrie 1936, 8½ - 11½)

ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE.

I.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+7y}{7} - \dfrac{y-x}{2} = 3+y \\ \dfrac{6}{x^2-y^2} - \dfrac{1}{y+x} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

II.

In triunghiul A B C se duc, înălţimea A D a vârfului A. mediana A E a triunghiului A D C şi înălţimea D F în triunghiul A D E.

Ştiind că avem:

B D = D E = E C; A E = 5 dm, D F = 2.4 dm.

se cere să se rezolve triunghiul A B C.

III.

Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos(B - C).$$

(20 Octomvrie 1936, 3½—6½).

ARITMETICĂ.

I.

Doi lucrători pot efectua o lucrare în 30 de zile. Ei lucrează împreună 6 zile, după care unul din ei se retrage, iar celalt termină lucrul ce a rămas în 32 zile. In câte zile ar fi lucrat singur?

II.

O persoană depune o sumă oarecare la o bancă. După 10 luni, capitalul cu dobândă fac la un loc 22.500 lei. După 18 luni capitalul cu dobânda fac la un loc 24.500. Care este capitalul iniţial şi cu ce procent a fost depus?

(21 Octomvrie 1936, 8½ - 11½).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 2, Octomvrie 1936. Congresul internaţional al matematicienilor, de *G. Ţiţeica*. Tipografia *„Gazeta Matematică“*, de *G-l Gh. Buicliu*. Probleme asupra patratelor, de *V. Thebault*. „Geometria neeuclidiană“ de *Marin G. Dumitrescu*. Proprietăţi ale pseudo-rombului, de *Iulian Alexiu*. Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului „General Şc. *Panaitescu*“.

2. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*, tome 38, 1936. Sur les solutions les plus générales de certaines équations aux dérivées partielles du type élliptique, par *Nicolas Ciorănescu*. Une équation intégrale singulière et quelques généralisations des fonctions de *Bessel*, par *Nicolas Ciorănescu*. Sur les coefficients de la factorielle et sur deux classes de polynômes harmoniques, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur le développement en série des fonctions holomorphes de deux variables complexes, par *Alexandre Ghica*. Sur quelques propriétés des fonctions biharmoniques, par *Miron Nicolesco*. Familles normales de fonctions polyharmoniques, par *Miron Nicolesco*. Sur les couples de congruences stratifiables appartenant à des complexes linéaires, par *Al. Pantazi*. Les relations de *Cauchy*, pour les polynômes à une variable complexe, par *D. Pompeiu*. Sur certains problèmes de maximum de *Stieltjes*, par *Tiberiu Popoviciu*

3. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiinţifică a liceelor militare, anul III, No. 5, Octomvrie 1936. *Euclid* (prelucrare), de Căpitan *M. Bănulescu*. Notă: O clasă de identităţi, de *N. O. Z.* Noutăţi, Publicaţii noui, probleme rezolvate şi propuse.

4. *Pitagora*, o revistă de matematici, anul I, N-rile 8 şi 9 anul II, No. 1 Octomvrie, 1936. Proces-Verbal. Impărţirea unui polinon printr'un produs de *n* factori binomiali de primul grad, de *G. G. Constantinescu*. Asupra ariei triunghiului, de *P. Boldescu*. Asupra unor identităţi condiţionate, de Lt. *C. D. Ionescu-Ţiu*. Câteva însumări, de Lt. *C. D. Ionescu-Ţiu*. Impărţirea unui polinom printr'un produs de *n* factori binomiali de primul grad, (urmare), de *G. G. Constantinescu*. Probleme date la examenul de Capacitate pentru profesori secundari de băeţi, sesiunea 1935. Probleme rezolvate şi propuse.

5. Prof. Ing. *C. C. Teodorescu*. La réception des rails et l'application pratique des résultats obtenus. (3-ème Journée Inte nationale du rail).

6. *M. Stamatiu* et *C. C. Teodoresco*. Quelques propriétes physiques et mécaniques du sel gemme roumain. (Extrait du Congrès International des Mines, de la Métallurgie et de la Géologie appliquée. Paris, Octombre 1935).

7. *Caius Jacob*. Sur un jet gazeux. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1936).

PROBLEME REZOLVATE

527. — *Fie un punct* M *în planul triunghiului* A B C, *fie* A′, B′, C′ *punctele în care dreptele* A M, B M, C M *întâlnesc respectiv laturile* B C, C A, A B *şi fie* A″, B″, C″ *punctele în care aceste laturi sunt întâlnite de o dreaptă* Δ. *Se consideră punctele* A_1 (B′ C″, B″ C′), B_1 (C′ A″, A′ C″), C_1 (A′ B″, B′ A″). *Să se arate că dreptele* AA_1, BB_1, CC_1 *sunt concurente.*

N. G. Botea

Soluţia acestei probleme este dată la pag. 88, Vol. XI „R. M. T.“ în articolul d-lui *C. Coşniţă*, intitulat *„Câte-va proprietăţi ale unor triunghiuri omologice“*.

Au trimis foarte bune soluţii geometrice, indepente de articolul citat d-nii: *V. Antoniu* şi *N. N. Mihăileanu*.

D-l *N. I. Manolescu* a rezolvat problema bazat pe articolul d-lui *N. G. Botea* din *„Foaia Matematică“* Vol. III, intitulat *„Asupra unor chestiuni de geometrie“*.

Soluţii bune prin geometria analitică de la d-şoara *Maria Neumann* şi de la d-nii: *Al. Podariu* şi *Virg. C. Popescu*.

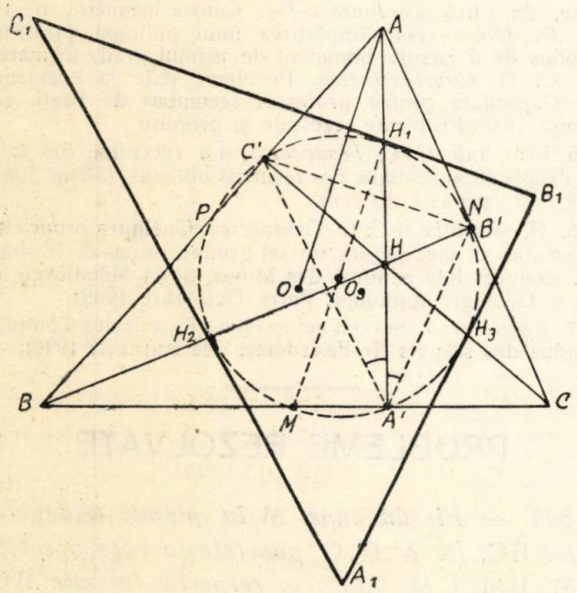
628. — *Fie* $A_1 B_1 C_1$ *triunghiul format prin ducerea paralelelor mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri şi ortocentrul triunghiului* A B C, *la laturile triunghiului său ortic.*

1°. *Să se demonstreze că triunghiurile* A B C, *şi* $A_1 B_1 C_1$ *sunt ortologice.*

2°. *Să se construiască triunghiul* A B C, *cunoscând triunghiul* $A_1 B_1 C_1$.

A. I. STAN

Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic, şi H ortocentrul triunghiului A B C; M mijlocul laturei B C şi H_1, H_2, H_3 mijloacele segmentelor A H, B H, C H; Or centrul cercului ABC şi O_9 centrul cercului $A'B'C'$.



Se ştie că A A' este bisectoarea unghiului $B'A'C'$, deci H_1 este mijlocul arcului $B'H_1C'$ în cercul O_9 şi diametrul MH_1 este perpendicular pe $B'C'$ pe care e perpendiculară şi raza B O, conform teoremei lui *Nagel.*

1°. $B_1 C_1$ fiind paralelă cu $B'C'$ este perpendiculară pe A O şi pe MH_1. Rezultă că triunghiul $A_1 B_1 C_1$ este circumscris cercului O_9, punctele H_1, H_2, H_3 fiind punctele de contact, deci $A_1 O_9$, $B_1 O_9$, $C_1 O_9$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului A B C. Triunghiurile sunt deci ortologice: perpendicularele din vârfurile triunghiului A B C pe laturile triunghiului $A_1 B_1 C_1$ se întâlnesc în O şi perpendicularele coborâte din vârfurile triunghiului $A_1 B_1 C_1$ pe laturile triunghiului A B C se întâlnesc în O_9.

2°. Se construeşte cercul O_9 înscris în $A_1 B_1 C_1$, punctele de contact fiind H_1, H_2, H_3. Se determină punctul M diametral opus lui H_1, iar din M se duce perpendiculara B C pe $A_1 O_9$. La fel se obţin punctele N, P şi direcţiile celorlalte două laturi.

Problema este totdeauna posibilă.

Soluţii bune primite de la d-nii: *Arsene Al., Coşniţă C., Dimitriu Gh. Şt., Dobromirescu P., Floareş I. M., Gheorghe Mihai, Ionescu-Ţiu D. C., Micula O., Mihăileanu N. N., Panaite N. T., Râmniceanu I. Cr.* şi *Savin C. I.*

Au rezolvat problema cu enunţul dat la pag. 38, Vol. VII, unde $A_1 B_1 C_1$ avea laturile paralele cu laturile triunghiului A B C, d-nii: *Beşchea G. N., Dinu S. D., Dumitrescu T. E., Ionescu Gh. Virgil, Ionescu-Ţiu D. C., Popovici M., Roman I. I., Sprinceană C. Gh., Tarţia V. I.* şi *Zagaican I.*

1426. — *Să se găsească un număr de trei cifre patrat perfect, egal cu suma patratelor a două numere consecutive.*

V. ALACI

Fie n, $n+1$ două numere consecutive. Conform enunţului trebuie să avem:

$$n^2 + (n+1)^2 = N^2, \tag{1}$$

unde N^2 este de trei cifre. Cum avem:

$$6^2 + 7^2 = 85, \qquad 22^2 + 23^2 = 1013,$$

rezultă:

$$6 < n < 23. \tag{2}$$

Relaţia (1) se mai poate scri:

$$2n(n+1) = (N-1)(N+1). \tag{3}$$

Primul membru divizându-se prin 2, rezultă că N trebuie să fie impar, adică de forma:

$$N = 2p + 1,$$

astfel că relaţia (3) simplificată prin 2, devine:

$$n(n+1) = 2p(p+1). \tag{4}$$

Cum $p(p+1)$ este par, fiind produsul a două numere consecutive, urmează că n sau $n+1$ trebuie să se dividă prin 4, şi cum trebuiesc satisfăcute inegalităţile (2), n poate fi:

8, 12, 16, 20; 7, 11, 15, 19.

Inlocuind succesiv aceste valori ale lui n în (4) şi simplificând prin 2, obţinem în al 2-lea membru $p(p+1)$, iar primul membru devine respectiv:

4×9, 6×13, 8×17, 10×21;
7×4, 11×6, 15×8, 19×10.

Se observă cu uşurinţă că dintre aceste produse, numai:

$$10 \times 21 = 14 \times 15$$

este un produs de două numere consecutive de forma $p(p+1)$ şi corespunde lui $n = 20$, deci $p = 14$ şi atunci $N = 2p + 1 = 29$.

Numărul cerut este atunci $N^2 = 29^2 = 841$, el satisfăcând enunţul:

$$20^2 + 21^2 = 29^2 = 841,$$

şi este singura soluţie.

Soluţie aproape analoagă dată de d-l *Cazanacli V. Petre* (Chişinău).

Soluţii ce au necesitat multe încercări, sau s'au folosit tabele de patrate perfecte, date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dulămiţă Tutu* (lic. Milit., Craiova), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Maşcas Petru* (Şc Polit., Timişoara), *Nedelcu N.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavrilă* (bacalaureat), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit, Timişoara), *Rajka Zoltán* (lic. Orăstie), *Rosemberg I.* (lic Roman) şi *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu).

1433. — *Un părinte lasă prin testament celor patru fii ai săi, drept moştenire, averea sa împărţită astfel: Primului îi lasă din avere* $\frac{3}{10}$, *plus 20000 lei. Celui de al 2-lea îi lasă din rest* $\frac{3}{8}$, *plus 25000 lei. Celui de al 3-lea îi lasă* $\frac{7}{9}$ *din suma rămasă după ce primii doi şi-au luat părţile respective, mai puţin 50000 lei. In fine celui mai mic îi lasă restul final, care este de 100.00 lei.*

Să se calculeze, care este moştenirea totală şi care sunt părţile cuvenite primilor trei copii.

M. GHERMANESCU

Soluţie aritmetică. După ce primii doi fii îşi iau părţile cuvenite, primeşte cel de al 3-lea fiu $\frac{7}{9}$ din *suma rămasă,* mai puţin 50000 lei, de unde urmează că a rămas pentru al 4-lea fiu $\frac{2}{9}$ din acea *sumă* şi încă 50000 lei, care conform enunţului fac 100000 lei.

De aci rezultă că cele $\frac{2}{9}$ părţi din *suma rămasă,* valorează $100000 - 50000 = 50000$ lei; atunci $\frac{1}{9}$ valorează 25000 lei, iar $\frac{7}{9}$ valorează $7 \times 25000 =$ 175000 lei, astfel că partea celui de al 3-lea fiu este $175000 - 50000 = 125000$ lei.

Să calculăm acum partea celui de al 2-lea fiu. Din *suma rămasă* după ce primul îşi ia partea, al 2-lea fiu primeşte $\frac{3}{8}$ şi încă 25000 lei, de unde urmează că a rămas din această *sumă* $\frac{5}{8}$, mai puţin 25000 lei, care valorează $125000 + 100000 =$ 225000 lei, suma părţilor luate de al 3-lea şi al 4-lea fiu împreună.

Dacă $\frac{5}{8}$ din *suma rămasă* după ce primul şi-a retras partea, mai puţin 25000 lei, valorează 225000 lei, urmează că numai cele $\frac{5}{8}$ părţi valorează $225000 + 25000 = 250000$ lei şi deci $\frac{1}{8}$ valorează $\frac{250000}{5} = 50000$ lei. Cum al 2-lea fiu primeşte $\frac{3}{8}$ şi încă 25000 lei, înseamnă că a primit $3 \times 50000 + 25000 = 175000$ lei.

Rezultă din cele de mai sus că al 2-lea, al 3-lea şi al 4-lea fiu au primit împreună:

$$175000 + 125000 + 100000 = 400000 \text{ lei.}$$

Să calculăm şi partea primului fiu. Primul fiu primind $\frac{3}{10}$ din moştenire şi încă 20000 lei, urmează că $\frac{7}{10}$ din mostenire mai puţin 20000 lei, este partea ramasă, adică 400000 lei, luaţi de ceilalti trei fii. De aci deducem că cele $\frac{7}{10}$ părţi din moştenire valorează $400000 + 20000 = 420000$ lei, deci $\frac{1}{10}$ valorează $\frac{420000}{7} = 60000$ lei. Atunci $\frac{3}{10}$ din moştenire şi încă 20000 lei, valorează $3 \times 60000 + 20000 =$ 200.000 lei, sumă, care este partea primită de primul fiu.

Dacă adunăm această sumă de 200.000 lei, luată de primul fiu, cu cei 400000 lei luaţi de ceil'alţi trei fii, găsim 600000 lei, valoarea moştenirei lasată prin testament.

Cele trei părţi cuvenite primilor trei copii sunt respectiv, după cum am găsit: 200000 lei, 175000 lei şi 125000 lei.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Mateiu D. D-tru* (lic Internat, Iaşi), *Mişca C. Kivu* (lic Focşani), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş) şi *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu).

Soluţie algebrică. Fie x valoarea în lei a moştenirei. Conform enunţului, rezultă că sumele în lei primite de cei patru fii, sunt:

I-iul primeşte: $\frac{3x}{10} + 20000.$

Al II-lea primeşte:

$$\frac{3}{8}\left(x - \frac{3x}{10} - 20000\right) + 25000 = \frac{21x}{80} + 17500.$$

Al III-lea primeşte:

$$\frac{7}{9}\left(x - \frac{3x}{10} - 20000 - \frac{21x}{80} - 17500\right) = \frac{49x}{144} - \frac{237500}{3}.$$

Al IV-lea primeşte: 100000.

Scriind acum că suma totală a moştenirei este egală cu suma părţilor cuvenite celor patru fii, obţinem ecuaţia:

$$x = \frac{3x}{10} + 20000 + \frac{21x}{80} + 17500 + \frac{49x}{144} - \frac{237500}{3} + 100000.$$

Aducând la acelaşi numitor prin *c. m. m. c. m.* al numitorilor, avem:

$$720x - 216x - 189x - 245x = 137500 \times 720 - 2375000 \times 240 = 99000000 - 57000000,$$

sau:

$$70x = 42000000.$$

De aci deducem:

$$x = 600000 \text{ lei},$$

valoarea moştenirei.

Părţile luate de primii trei copii, sunt privind expresiunile în x corespunzătoare de mai sus:

I-iul a primit:

$$\frac{3 \times 600000}{10} + 20000 = 200000 \text{ lei}.$$

Al II-lea a primit:

$$\frac{21 \times 600000}{80} + 17500 = 175000 \text{ lei}$$

Al III-lea primit:

$$\frac{49 \times 600000}{144} - \frac{237500}{3} = 125000 \text{ lei}.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteann F. Marcel* (Craiova), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P)

1434. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, care este egal cu de două ori produsul numerilor formate cu primele două cifre şi ultimele trei cifre.*

V. THÉBAULT

Soluţia autorului. Fie x şi y numerile formate cu primele două cifre şi cu ultimele trei cifre, ale patratului de cinci cifre cerut.

Conform enunţului, avem:

$$(1) \qquad N = 1000x + y = 2xy,$$

unde:

$$(2) \qquad 10 \leq x < 100, \qquad 100 \leq y < 1000.$$

Relaţia (1) se mai poate scri:

$$(3) \qquad \frac{1000}{y} = \frac{2x-1}{x}.$$

Această ecuaţie trebue rezolvită în numere întregi, sub condiţiile (2).

Fracţia din membrul al 2-lea fiind ireductibilă (căci un divizor a lui $x \neq 1$, nu poate divide pe 1 de la numărător), trebuie să avem:

$$(4) \qquad \begin{cases} 1000 = k(2x-1) \\ y = kx \end{cases}$$

unde $1 < k < 10$ şi întreg, având în vedere relaţiile (2).

Privind prima relaţie din (4), observând că $2x-1$ este un număr impar şi că 1000 are divizorul 8, rezultă că nu putem avea decât:

$$k = 8,$$

ca fiind de o singură cifră.

In acest caz relaţiile (4), simplificate, devin:

$$\begin{cases} 125 = 2x - 1 \\ y = 8x, \end{cases}$$

relaţii din care deducem imediat:

$$x = 63, \qquad y = 504,$$

care introduse în (1) ne dau:

$$N = 63504.$$

Cum acest număr este şi patrat perfect, el este soluţia problemei, căci satisface toate condiţiile din enunţ, având:

$$63504 = 2 \times 63 \times 504 = 252^2.$$

Au găsit soluţia din enunţ, dar prin mai multe calcule, d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău) şi *Mateiu D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi).

1440. — *Doi săteni pornesc cu căruţele, în acelaşi timp, primul de la Reşiţa la Văliug, al 2-lea de la Văliug la Reşiţa. După două ore de mers, primul se opreşte o oră, pe când celalt continuă drumul. După ora de oprire, distanţa dintre cei doi săteni mai era de 3 km., şi ei continuându-şi drumul, ajung în acelaşi timp, primul la Văliug, al 2-lea la Reşiţa. Dacă în momentul când sătenii se aflau la 3 km. unul de altul (la finele orei de oprire a primului) ar fi continuat drumul, primul cu viteza celui de al 2-lea şi al 2-lea cu viteza primului, atunci primul ar fi ajuns la Văliug cu 1 ora 6 minute după ce al 2-lea ar fi ajuns la Reşiţa. Să se afle distanţa în km. dintre Reşiţa şi Văliug şi vitezele în km/oră cu care au mers căruţele cu cei doi săteni.* V. ALACI

Fie x distanţa în km. între $R.$ şi $V.$, iar v_1 şi v_2 vitezele în km/oră cu care merg cu căruţele cei doi săteni. In primele 3 ore, primul sătean a parcurs $2v_1$ km. de la $R.$ la $V.$ (fiindcă a avut o oră de oprire), iar al 2-lea sătean a parcurs în sens invers $3v_2$ km, ei mergând cu mişcare uniformă. Cum după aceste 3 ore, a mai rămas între ei o distanţă de 3 km., rezultă că putem scri:

$$(1) \qquad x - (2v_1 + 3v_2) = 3.$$

Cei doi săteni, continuând drumul după ora de oprire, le mai trebuie până la destinaţie, primului $\frac{x - 2v_1}{v_1}$ ore, iar celui de al 2-lea $\frac{x - 3v_2}{v_2}$ ore. Cum ei ajung simultan, primul la $V.$ şi al 2-lea la $R.$, rezultă că avem:

$$(2) \qquad \frac{x - 2v_1}{v_1} = \frac{x - 3v_2}{v_2}.$$

Dacă însă după ora de oprire, primul ar continua cu viteza celui de al 2-lea şi al 2-lea cu viteza primului, evident că le-ar trebui până la destinaţie respectiv:

$$\frac{x - 2v_1}{v_2} \text{ ore} \qquad \text{şi} \qquad \frac{x - 3v_2}{v_1} \text{ ore.}$$

Cum primul sătean ajunge la $V.$ cu $1^{ora}, 6^m = 1\frac{1}{10}$ ore $= \frac{11}{10}$ ore, mai târziu ca al 2-lea să ajungă la $R.$, rezultă că avem:

$$(3) \qquad \frac{x - 2v_1}{v_2} = \frac{x - 3v_2}{v_1} + \frac{11}{10}.$$

Inlocuind pe x scos din ecuaţia (1), în ecuaţiile (2) şi (3), obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{3 + 3v_2}{v_1} = \dfrac{3 + 2v_1}{v_2} \\ \dfrac{3 + 3v_2}{v_2} = \dfrac{3 + 2v_1}{v_1} + \dfrac{11}{10}. \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{v_2} - \dfrac{3}{v_1} = 3\dfrac{v_2}{v_1} - 2\dfrac{v_1}{v_2} \\ \dfrac{3}{v_2} - \dfrac{3}{v_1} = \dfrac{1}{10}, \end{cases}$$

sau încă şi mai simplu:

$$(4) \qquad \begin{cases} 3\dfrac{v_2}{v_1} - 2\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = \dfrac{1}{30}. \end{cases}$$

Dacă notăm:

$$(5) \qquad \frac{v_2}{v_1} = z,$$

prima ecuaţie din (4) devine:

$$3z - \frac{2}{z} = \frac{1}{10},$$

sau:

$$30z^2 - z - 20 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie şi ţinând seamă că problemei nu-i convine de cât z pozitiv, găsim:

$$z=\frac{1+\sqrt{2401}}{60}=\frac{5}{6}.$$

Inlocuind în (5) această valoare, deducem:

$$(6)\qquad v_2=\frac{5}{6}v_1.$$

Această valoare înlocuită în a 2-a ecuaţie din (4), ne dă:

$$\frac{6}{5v_1}-\frac{1}{v_1}=\frac{1}{30},$$

sau:

$$\frac{1}{5v_1}=\frac{1}{30},$$

deci:

$$(7)\qquad v_1=6.$$

Inlocuind în (6) valoarea lui v_1 găsită, obţinem:

$$(8)\qquad v_2=\frac{5}{6}6=5.$$

Valorile lui v_1 şi v_2 astfel găsite, le înlocuim în (1) şi obţinem:

$$x=3+12+15=30$$

Aşa dar, distanţa cerută este de 30 km., iar vitezele cu care au mers căruţele cu cei doi săteni, sunt respectiv, 6 km/oră şi 5 km/oră.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Berinde Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Maftei M C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Nestorescu Marin* (Şc. Normală din Oradia), *Radu Aurel* (l c. Milit., Cernăuţi), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Rosemberg I.* (lic. Roman) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

PROBLEME PROPUSE

1529. — Să se afle un cub perfect de patru cifre, ştiind că numărul format de prima şi ultima cifră e cub perfect şi că dacă mărim cifra sutelor cu 3 obţinem un număr divizibil prin 11.

C-TIN JIDANU

1530. — Fie:

$$T=\frac{ab-1+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$$

media tangenţială a numerelor întregi a şi b, iar A, G, H, media aritmetică, media geometrică şi media armonică a acestor numere. In ce caz T formează o progresie aritmetică cu două din numerile A, G, H?

G-L GH. BUICLIU

1531. — Pe diagonalele AC şi BD ale paralelogramului ABCD, să se determine respectiv punctele M şi N astfel ca să avem:

$$\overline{BM}=\overline{MN}=\overline{NC}.$$

O. N. ŢINO

1532. — Intr'un cerc de rază R circumscris unui triunghiu ascuţit unghiu ABC, se duc diametrele AOA', BOB' şi COC'. Să se arate că suprafaţa exagonului convex format de laturile triunghiurilor ABC şi A'B'C' este dată de expresia $pR\sum \cot\frac{A}{2}$, p fiind semiperimetrul triunghiului ABC.

L-T. C. IONESCU-ŢIU

1533. — Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia:

$$4000x+3y=4xy.$$

V. ALACI

1534. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a-x}=y+y^2z\\[2ex]\dfrac{1}{b-y}=z+z^2x\\[2ex]\dfrac{1}{c-z}=x+x^2y\end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1535. — Să se rezolve următorul sistem:

$$\begin{cases}x-y=a\\[2ex]\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=\dfrac{b}{c}\end{cases}$$

şi să se stabilească condiţia de posibilitate.

MIHAIL BOTEZ

1536. — α, β, γ fiind laturile triunghiului care are drept vârfuri picioarele bisectoarelor interioare ale unui triunghiu ABC, avem relaţia:

$$a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta=4rs\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right).$$

MARCEL F. AMARASTEANU

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţi reuşiţi la examenul de admitere în anul preparator, în ordinea clasificaţiei

(Anul şcolar 1936—1937)

1. *Popa P. A. Nicolae* (lic. Samuil Vulcan, Beiuş).
2. *Andriescu-Cale I. Bogdan* (lic. C. Negruzzi, Iaşi).
3. *Madar F. Vasile* (lic. Regele Ferdinand, Turda).
4. *Marnea Gl. Desideriu* (lic. Sam. Vulcan, Beiuş).
5. *Bodea I. Constantin* (lic. A. Mureşan, Dej).
6. *Dinu I. Dumitru* (Şc. Sup. Arte Meserii, Braşov).
7. *Munteanu V. Ioan* (lic. Sam. Vulcan, Beiuş).
8. *Bărbulescu M. Florea* (Şc. Cond. Lucr. Publice, Cluj).
9. *Niţescu D. Simona* (Instit. Soc. Ortodoxe, Bucureşti, Liceu).
10. *Crihană V. Dumitru* (lic. Vasile Alexandrii, Galaţi).
11. *Nistor N. Andrei* (lic. Vasile Alexandrii, Galaţi).
12. *Novitchi A. Vladimir* (lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara)
13. *Vasilescu V. Alexe* (lic. Unirea, Focşani).
14. *Mardan Tr. Mugur Traian* (lic. I. C. Brătianu, Piteşti).
15. *Iancso I. Tiberiu-Acaţiu* (lic. rom cat., Odorheiu).
16. *Dogaru V. Romulus* (lic. Tudor Vladimirescu, Tg-Jiu).
17. *Palade I. Mircea* (lic. Decebal, Deva).
18. *Atanasiu If. Alexandru* (lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara).
19. *Crâjanovschii M. Nicolae* (lic. Marele Voevod Mihai, Cetatea-Albă).
20. *Gagyi Palffy I. Andrei* (lic. rom. cat. Majlath, Alba-Iulia).
21. *Huţanu C. Petru* (lic. Codreanu, Bârlad).
22. *Bărbulescu C. Constanlin* (lic Carol I., Craiova)
23. *Codarcea I. Alexandru* (lic C. Diaconovici Loga, Timişoara.
24. *Fira D. Gheorghe* (lic. Carol I, Craiova).
25. *Noja A. Antonie* (lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu).
26. *Stefănescu S. Gheorghe* (Arsen. Armatei, Şc. Sup. Arte Meserii, Bucureşti).
27. *Iacobovici I. Ioan* (lic. C Diaconovici Loga, Timişoara),
28. *Ionescu M. Florea* (lic C. Diaconovici Loga, Timişoara).
29. *Păcurariu T. Liviu* (lic. Andrei Mureşan, Dej).
30. *Firăstrău B. Ioan* (lic. Principele Nicolae, Sighişoara).
31. *Brahonschi I. Gheorghe* (lic. Gr. Ghica Vodă, Dorohoi).
32. *Dumitrescu N. Iosif* (lic. Dinică Golescu, Câmpulung-Muscel).
33. *Muste Gv. Ovidiu* (lic. Andrei Mureşan, Dej).
34. *Oltean P. Andron* (lic. Petru Maior, Gherla).
35. *Strâmtu I. Ioan* (Şc. Sup. Arte Meserii, Braşov).
36. *Tiru D. Dumitru* (lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara).
37. *Gitta Ag. Alexandru* (Şc. Sup. Arte Meserii, Arad).
38. *Olteanu I. Victor* (lic. Sft. Vasile, Blaj).
39. *Keszeg St. Ladislau* (lic. Gheorghe Lazar, Sibiu).
40. *Martinovschi A. Paul* (lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara).
41. *Sărătoc Gr. Grigore* (lic. Em. Gojdu, Oradea).
42. *Aman V. Constantin* (lic. Gr. Ghica Vodă, Dorohoi).
43. *Ignat I. Eugen* (lic Gheorghe Lazăr), Bucureşti).
44. *Ionescu M. Ioan* (lic. Alex. Papiu Ilarion, Tg-Mureş).
45. *Niţu I. Gherghe* (Şc. Sup Arte Meserii, Iaşi).
46. *Stroe I. Gheorghe* (lic. Sft Gheorghe, Bucureşti).
47. *Cociu N. Petru* (lic. Gr. Ghica Vodă, Dorohoi).
48. *Mikoss Al. Carol* (lic. Moise Nicoară, Arad).
49. *Constantinescu Al. Alexandru* (Şc. Sup. Arte Meserii, Craiova).
50. *Orghidan Tr. Traian* (lic. Ferdinand I, Bacău).
51. *Baciu Gv. Ioan* (lic. de Stat, Petroşani).
52. *Brumariu Al. Vaslie* (lic Reg. Ferdinand, Turda).
53. *Filip M. Mihai* (Şc. Sup. Arte Meserii, Timişoara).
54. *Pincu I. Liberu* (lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara).
55. *Popa Gh. Ioan* (lic. Sft. Vasile, Blaj).
56. *Reghiş I. Pavel* (lic. Sam. Vulcan, Beiuş).
57. *Suciu V. Coriolan Mircea* (lic. Principele Nicolae, Sighişoara).
58. *Cojocaru Gr. Leonte* (lic. Dragoş Vodă, Câmpulung-Mold).

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrunachievici Vladimir (1470, 1475, 1477, 1479, 1485, 1487, 1493, 1499, 1500, 1510, 1513, 1516, 1519). *Apostol Radu* (N., P., 1263, 1282, 1299, 1325, 1432, 1334, 1493, 1503, 1510, 1512, 1516, 1517, 1519, 1520, 1525, 1526) *Cazanacli V. Petre* (1481, 1483, 1484, 1489, 1491, 1493, 1494, 1496). *Constantinescu C. Vasile* (1470). *Cotescu C-tin* (1470, 1471, 1476, 1488, 1500, 1503, 1517). *Cristocea Gh. Nicolae* (1521). *Duiculescu C. Radu* (1521) *Florescu Victor* (1471, 1481, 1505, 1506, 1512, 1517, 1520, 1524). *Gloden A.* (N. P, 1384, 1499, 1512), *Grumăzescu Mircea* (P). *Herman Al. Victor* (P., 1333, 1468, 1175, 1476, 1484, 1494, 1497, 1517), *Ionescu C. Ştefan* (1468, 1470, 1475, 1521), *Jidanu I. C-tin* (P., 1429, 1465, 1505, 1521, 1522, 1524). *Kornis Ernest* (1521, 1522, 1523, 1524). *Lăzărescu Stelian* (1470, 1487, 1521). *Marica Pompeiu* (P., 1435, 1445, 1448, 1451) *Moisoviciu M. Ştefan* (1402, 1405, 1447, 1449, 1465, 1468, 1471, 1473, 1484, 1488. 1499, 1502, 1503, 1506, 1513. 1517, 1520, 1521, 1522, 1524). *Negulescu D. Ştefan* (1455, 1475, 1479, 1480, 1503, 1509, 1512, 1519, 1525). *Negulescu Victor Ştefan* (P., 1488, 1521, 1526). *Popescu Adrian* (P). *Postelnicescu C. M* (1363, 1422, 1517) *Rădulescu Gh. Octavian* (P., 1506, 1513, 1515, 1517, 1520, 1521). *Ripianu Andrei* (1513, 1515, 1516, 1517, 1520, 1521). *Stefănescu Costin* (P, 1468, 1470, 1473, 1475, 1476, 1494. 1497, 1503, 1517, 1519, 1520, 1521). *Stefănescu D. Nicolae* (1387, 1388, 1488, 1521, 1524). *Stoica V. Vasile* (1521). *Theodorescu Dorin* (1497, 1517, 1520). *Viciu A. Aurel* (1513, 1516, 1517). *Zagaican Ilie* (1400, 1405, 1406, 1422, 1424, 1447, 1449, 1455, 1456, 1466, 1467, 1468, 1469, 1471, 1494).

Abonamentul pe anul XVI-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVI. 15 DECEMVRIE 1936 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: SOLUTIUNILE INTREGI ALE ECUATIUNEI $x^2 \pm y^2 = a\,10^n$ (URMARE).
2. NOTE MATEMATICE: 19, 20, 21.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 54, 165, 1448, 1449, 1451, 1452, 1453, 1456, 1462.
5. PROBLEME PROPUSE: 1537-1545.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208. sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMVRIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

SOLUŢIUNILE ÎNTREGI ALE ECUAŢIUNEI $x^2 \pm y^2 = a \cdot 10^n$

DE PROF. GH. CONSTANTINESCU

(urmare)

1. *Să căutăm acum soluţiunile ecuaţiunei* $x^2 - y^2 = 10^n$ *şi să separăm patratele gemene şi pseudo-gemene de ambele specii unele de altele.*

In formulele găsite pentru ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = 2^\alpha \cdot 5^\beta$$

facem pe $\alpha = \beta = n$ şi găsim:

$$(x, y) = 5^k 2^{i-1} (5^{n-2k} 2^{n-2i} \pm 1)$$
$$(x, y) = 5^k 2^{i-1} (5^{n-2k} \pm 2^{n-2i}),$$

care reprezintă toate soluţiile ecuaţiei:

$$x^2 - y^2 = 10^n.$$

Cum dintr'o soluţie (x_1, y_1) a ecuaţiei $x^2 - y^2 = 10^{n-2i}$, deducem prin înmulţire cu 10^{2i} soluţii multiplie de 10 ale ecuaţiei $x^2 - y^2 = 10^n$, rezultă că e destul să găsim numai soluţiile cari nu sunt multiple de 10 ale ecuaţiei $x^2 - y^2 = 10^n$, pentru-că cele cari sunt multipli de 10, le găsim din soluţiile ecuaţiei $x^2 - y^2 = 10^{n-2i}$, înmulţite cu 10^{2i}.

Pentru aceasta facem pe $k = 0$ şi $i = 1$ şi astfel găsim soluţiile cari nu sunt multiple de 10, date de următoarele formule:

(1) $$(x, y) = 5^k (5^{n-2k} 2^{n-2} \pm 1)$$

(2) $$(x, y) = 5^k (5^{n-2k} \pm 2^{n-2})$$

(3) $$(x, y) = 2^{i-1} (5^n 2^{n-2i} \pm 1)$$

(4) $$(x, y) = 2^{i-1} (5^n \pm 2^{n-2i}).$$

In formulele (1) şi (2), k variază de la zero până $E\left(\frac{n}{2}\right)$.

Aceste două formule ar concide, făcând k să varieze de la 0 la n, cu obligaţia să luăm semnul + şi în cazul când găsim pentru y semnul minus.

Acelaşi lucru putem spune şi de formulele (3) şi (4) şi deci formulele:

$$(x, y) = 5^k (5^{n-2k} 2^{n-2i} \pm 1)$$
$$(x, y) = 2^{i-1} (5^n 2^{n-2i} \pm 1),$$

unde k variază de la zero până la n, iar i de la 1 până la $n-1$, reprezintă toate soluţiile ecuaţiei $x^2 - y^2 = 10^n$, afară de acelea care sunt multiple de zece.

Să cercetăm mai întâi soluţiunile date de prima formulă.

Valoarea lui $x = 5^{n-k} 2^{n-2} + 5^k$, compusă din suma a două părţi, în care prima parte descreşte şi a 2-a parte creşte când k creşte, rezultă că x va avea un minim,

Valoarea minimă a lui x, o găsim derivând în raport cu k şi egalând cu zero, avem că pentru:

$$k = \frac{n}{2 \log 5} - \frac{\log 2}{\log 5} = 0{,}7153\, n - 0{,}4308$$

x este minim.

Tot din ecuaţia derivatei, găsim că x este minim, când cele două părţi ale sumei sunt egale.

Pentru ca această formulă să ne dea *patrate gemene,* trebuie să punem condiţiunea ca $x < \sqrt{10^{n+1}}$ şi vom avea:

$$5^{n-k} 2^{n-2} + 5^k < \sqrt{10^{n+1}}$$

sau:

$$5^{2k} - 5^k \sqrt{10^{n+1}} + 5^n 2^{n-2} < 0.$$

De aci deducem că:

$$\sqrt{10^n} \frac{\sqrt{10} - 3}{2} < 5^k < \sqrt{10^n} \frac{\sqrt{10} + 3}{2},$$

sau:

$$0{,}7153\, n - 1{,}5605 < k < 0{,}7153\, n + 0{,}6996.$$

Numai când k va varia între aceste limite vom avea *patrate gemene*, pentru celelalte valori ale lui k vom avea *patrate pseudo-gemene.*

Să vedem cum separăm *patratele pseudo-gemene* de specia I-a şi a II-a. Ridicăm la pătrat pe x şi y dat de prima formulă, găsim:

$$(x^2, y^2) = 10^{2n-2k} 2^{2k-4} \pm 5 . 10^{n-1} + 5^{2k}.$$

Din această formulă vedem, că ceeace schimbă valoarea cifrelor din x^2 şi y^2 este expresiunea constantă $5 . 10^{n-1}$.

Să presupunem mai întâi pe n par, $n = 2p$.

Pentru $h = p - 1$, valorile lui x^2 şi y^2 vor fi:

$$(x^2, y^2) = 10^{2p+2} . 2^{2p-6} \pm 5 . 10^{2p-1} + 5^{2p-2}.$$

Numărul 5^{2p-2} este mai mic ca $5 . 10^{2p-1}$, cel puţin de 10 ori, rezultă că cifra de ordinul $2p$ din x^2 este 5, iar cifrele de ordinul $2p+1$ şi $2p+2$ sunt zero şi mai rezultă că cifra de ordinul $2p$ din y^2 este tot 5, iar cifrele de ordinul $2p+1$ şi $2p+2$ sunt egale cu 9.

Rezultă deci că pentru $k = p - 1$, *patratele* sunt *pseudo-gemene* de specia a II-a şi în acelaş mod se vede că pentru $k \leq p - 1$, formula (1) ne dă *patrate pseudo-gemene* de specia a 2-a.

Pentru $k = p$, valoarile lui x^2 şi y^2 vor fi:

$$(x^2, y^2) = 10^{2p} . 2^{2p-4} \pm 5 . 10^{2p-1} + 5^{2p}.$$

Din această formulă se vede uşor că cifra de ordinul $2p$ din x^2 este 5, iar cifra de ordinul $2p+1$, este diferită de zero, căci este ultima cifră a unei puteri oarecare a lui 2, iar cifra de ordinul $2p$ din y^2 este tot 5 şi cifra de ordinul $2p+1$ este micşorată cu o unitate faţă de cifra de acelaş ordin din x^2.

Rezultă deci că pentru $k = p$, avem în totdeauna *patrate pseudo-gemene* de specia I-a.

In acelaş mod se dovedeşte că pentru $k > p - 1$ şi mai mic ca limita inferioară a *patratelor gemene*, formula ne dă *patrate pseudo-gemene* de specia întâi, afară de următoarele două cazuri, când avem *patrate pseudo-gemene* de specia a 2-a.

1. Dacă cifra de ordinul $2p$ din numărul $10^{2n-2k} 2^{2k-4}$ este 5, sau mai mare ca 5, iar cifra de ordinul $2p+1$ din acelaş număr este 9.

2. Dacă cifra de ordinul $2p$ din acelaş număr este mai mică ca 5, iar cifra de ordinul $2p+1$ din acelaş număr este zero.

Cu o tabelă a puterilor lui 2, găsim uşor când avem *patrate pseudo-gemene* de specia întâi sau a 2-a.

Când k variază de la limita superioară a *patratelor gemene* şi până la n, avem *patrate pseudo-gemene* de specia întâi, afară de cele două cazuri de mai sus, unde se înlocueşte numărul $10^{2n-2k} 2^{2k-4}$ cu numărul 5^{2k}.

In cazul când $n = 2p + 1$, găsim aceleaşi condiţiuni ca în cazul n par, cu deosebirea că *patratele pseudo-gemene* de specia 2-a sunt date de $k = 0, 1\ 2 \ldots p$, nu $p - 1$, cum am găsit la cazul când n este par.

Să cercetăm soluţiunile date de formula a 2-a.

Valoarea lui $x = 5^n 2^{n-i-1} + 2^{i-1}$ este compusă din două părţi, în care prima parte descreşte şi a doua parte creşte când i creşte.

Partea întâi, care descreşte, va fi minimă, când $i = n - 1$ şi valoarea minimă a acestei părţi va fi 5^n, care pentru $n > 2$ este mai mare ca $10^{\frac{n+1}{2}}$.

Rezultă că această formulă ne va da pentru x valori mai mari ca $\sqrt{10^{n+1}}$, şi deci nu ne va da, nici-odată *patrate gemene.*

Patratele pseudo-gemene le vom separa tot ca la formula întâi şi anume atât timp cât i variază de la **1** până la $p - 2$ când $n = 2p$ şi dela 1 până la $p - 1$ când $n = 2p + 1$, formula ne dă *patrate pseudo-gemene* de specia a doua, iar de aci înainte ne dă *patrate pseudo-gemene* de specia întâi afară de cele două restricţiuni de la formulele (1), cari se aplică la numărul $10^{2n-2i-2} 5^{2i+2}$.

O tabelă cu diferitele puteri ale lui 5 ne va separa imediat *patratele pseudo-gemene.*

2. *Să căutăm soluţiile ecuaţiunei:*

$$x^2 - y^2 = a . 10^n, \quad \text{când} \quad a = 3, 5, 7, 9.$$

Soluţiunile acestei ecuaţiuni, le vom deduce din soluţiunile ecuaţiunilor:

$$x^2 - y^2 = 10^n \quad \text{şi} \quad x^2 - y^2 = a.$$

In adevăr soluţiile ecuaţiei:

$$x^2 - y^2 = a, \qquad a = 3, 5, 7, 9$$

sunt:

$$a=3, \quad x_1=2y_1=1$$
$$a=5, \quad x_2=3y_2=2$$
$$a=7, \quad x_3=4y_3=3$$
$$a=9, \quad x_4=5y_4=4$$

și

$$x_3=3y_1=0.$$

Din înmulțirea lui:

$$x^2-y^2=10^n \quad \text{și} \quad x_i^2-y_i^2=a,$$

găsim:

$$(x^2-y^2)(x_i^2-y_i^2)=(xy_i\pm yx_i)^2.(xy_i\pm yx_i)=a10^n.$$

Inlocuind pe x și y cu valorile găsite, vom avea:

(1) $$(x,y)=a10^{n-k}2^{k-2}\pm 5^k$$

(2) $$(x,y)=10^{n-k}2^{k-2}\pm a5^k$$

(3) $$(x,y)=a10^{n-i-1}5^{i+1}\pm 2^{i-1}$$

(4) $$(x,y)=10^{n-i-1}5^{i+1}\pm a.2^{i-1},$$

care reprezintă toate soluțiunile ecuațiuni $x^2-y^2=a10^n$.

Pentru a separa *patratele gemene* de cele *pseudo-gemene*, ar trebui să punem condițiunea ca x dat de aceste patru formule, să fie mai mic ca $\sqrt{10^{n+1}}$, însă pentru a ușura problema voui dovedi că din *patrate pseudo-gemene* ale ecuației $x^2-y^2=10^n$, deducem tot *patrate pseudo-gemene* ale ecuației $x^2-y^2=a10^n$ și în acest caz *patratele gemene* ale ecuației $x^2-y^2=a.10^n$ le aflăm din *patratele gemene* ale ecuației $x^2-y^2=10^n$.

Fie x și y două *patrate pseudo-gemene* ale ecuației $x^2-y^2=10^n$ și $(x_i\ y_i)$ o soluție a ecuației $x^2-y^2=a$.

Am văzut că:

$$X=xx_i\pm yy_i$$
$$Y=xy_i\pm yx_i,$$

vor fi două soluții ale ecuației $X^2-Y^2=a10^n$.

Să arătăm că aceste două soluții sunt *patrate pseudo-gemene.*

Prima valoare a lui $X=xx_i+yy_i$ este mai mare de cât $\sqrt{10^{n+1}}$, dacă $x>\sqrt{10^{n+1}}$, iar a doua valoare a lui:

$$X=xx_i-yy_i=(x-y)y_i+x$$

de oarece $x_i-y_i=1$ și deci și în acest caz:

$$X>\sqrt{10^{n+1}}.$$

Rezultă că pentru a găsi *patratele gemene* ale lui $x^2-y^2=a10^n$, trebue să căutăm cari *patrate gemene* date de $x^2-y^2=10^n$, dau *patrate gemene* și pentru $x^2-y^2=a.10^n$.

Patratele pseudo-gemene le vom separa ca și la ecuația $x^2-y^2=10^n$ și anume ridicăm la patrat valoarile lui x și y date de formulele (1) si (2), vom avea:

$$(x^2,y^2)=a^2\,10^{2n-2k}2^{2k-4}\pm 5a10^{n-1}+5^{2k}$$
$$(x^2,y^2)=10^{2n-2k}2^{2k-4}\pm 5a10^{n-1}+a^2\,5^{2k}$$

Din aceste formule deducem, $k<p$ când $n=2p$ și $k<p+1$.

Când $n=2p+1$, amândouă formulele dau ca soluțiuni numai *patrate pseudo-gemene* de specia a 2-a și pentru celelalte valori ale lui k exceptând pe acelea cari dau *patrate gemene,* vom avea *patrate pseudo-gemene* de specia întâi, în afară de următoarele două cazuri, când vor fi de specia a 2-a.

1. Când cifra de ordinul n din numărul $a^2\,10^{2n-2k}2^{2k-4}$ pentru prima formulă și din numărul $10^{2n-2k}2^{2k-4}$ pentru a 2-a formulă pentru k mai mic ca limita inferioară a *patretelor gemene*, iar pentru k mai mare ca limita superioară, cifra de ordinul n din numerile 5^{2k} pentru prima formulă și $a^2\,5^{2k}$ pentru a 2-a formulă, este 5 sau mai mare ca 5, iar cifra de ordinul $n+1$ din aceleași numere este egală cu:

8 și 9, pentru $a=3$

7, 8, 9, pentru $a=5$

6, 7, 8, 9, pentru $a=7$

5, 6, 7, 8, 9, pentru $a=9$

2. Când cifra de ordinul n din aceleași numere este inferioară lui 5 și cifra de ordinul $n+1$ din aceleași numere este egală cu:

0, 1, pentru $a=3$

0, 1, 2, pentru $a=5$

0, 1, 2, 3, pentru $a=7$

0, 1, 2, 3, 4, pentru $a=9$.

Formulele (3) și (4) nu dau *patrate gemene* și separarea *patratelor pseudo-gemene* se face la fel cu acea făcută la formulele (1) și (2).

3. *Să se rezolve ecuaţia*:

$$x^2 - y^2 = a \cdot 10^n, \quad \text{pentru} \quad a = 2,\ 4,\ 8.$$

In formulele găsite la ecuaţia $x^2 - y^2 = 2^\alpha 5^\beta$, facem $\alpha = n+1,\ n+2,\ n+3$ şi $\beta = n$ şi găsim următoarele formule:

$$(1)\quad \begin{matrix}(x,y) = 5^k.(5^{n-2k}2^{n-1} \pm 1)\\ (x,y) = 2^{i-1}(5^n 2^{n+1-2i} \pm 1)\end{matrix}, \text{ pentru } a = 2$$

$$(2)\quad \begin{matrix}(x,y) = 5^k(5^{n-2k}2^n \pm 1)\\ (x,y) = 2^{i-1}(5^n 2^{n+2-2i} \pm 1)\end{matrix}, \text{ pentru } a = 4$$

$$(3)\quad \begin{matrix}(x,y) = 5^k(5^{n-2k}2^{n+1} \pm 1)\\ (x,y) = 5^{i-1}(5^n 2^{n+3-2i} \pm 1)\end{matrix}, \text{ pentru } a = 8.$$

Primele formule din (1), (2) şi (3) dau *patrate gemene*, iar cele de al doilea formule nu dau *patrate gemene*.

Pentru a determina *patratele gemene* să punem condiţiunea ca x din primele formule să fie mai mic ca $\sqrt{10^{n+1}}$.

Vom găsi că atunci când k va fi cuprins:

$$\frac{\frac{n}{2} + \log(\sqrt{10} - \sqrt{10} - a)}{\log 5} <$$

$$k < \frac{\frac{n}{2} + \log(\sqrt{10} + \sqrt{10} - 2)}{\log 5},$$

vom avea numai *patrate gemene*, iar pentru celelalte valori ale lui k vom avea *patrate pseudo-gemene*.

Pentru a separa *patratele pseudo-gemene*, luăm patratele lui x^2 şi y^2 din formulele (1) şi găsim:

$$(x^2, y^2) = 10^{2n-2k}2^{2k-2} \pm 10^n + 5^{2k}$$

$$(x^2, y^2) = 10^{2n-2i}2^{2i} \pm 10^n + 5^{2i-2}.$$

Prima formulă dă *patrate pseudo-gemene* de specia II, pentru $k \leq p-1$ când $n = 2p$ şi pentru $k \leq p$ când $n = 2p+1$ şi de la această limită până la limita inferioară a *patratelor gemene*, ne dă *patrate pseudo-gemene* de specia I-a, când cifra de ordinul $n+1$ din numărul:

$$10^{2n-2k}2^{2k-2} \text{ este } 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

iar când această cifră este zero sau 9, ne dă *patrate pseudo-gememe* de specia a II-a, iar de la limita superioară a *patratelor gemene* şi până la n, avem *patrate pseudo-gemene* de specia I-a.

Când cifra de ordinul $n+1$ din 5^{2k} este, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi *patrate pseudo-gemene* de specia 2-a când aceiaşi cifră este zero sau 9.

Formula a 2-a ne dă aceleaşi patrate cu deosebirea înlocuirei lui k prin i, iar numerile se înlocuesc:

$$10^{2n-2i}2^{2i} \quad \text{şi} \quad 5^{2i-2}.$$

Formulele acestea, nu dau *patrate gemene* şi limitele inferioare şi superioare se înlocuesc cu minimul expresiunei.

In acelaşi mod procedăm şi pentru formulele (2) şi (3) şi separăm *patratele gemene* de *patratele pseudo-gemene* de specia întâi şi a doua.

4. *A mai rămas să rezolvăm ecuaţia:*

$$x^2 - y^2 = 6 \cdot 10^n.$$

Din soluţiile găsite pentru ecuaţia $x^2 - y^2 = 2 \cdot 10^n$ şi singura soluţie a ecuaţiei $x^2 - y^2 = 3$, găsim:

$$(x,y) = 3 \cdot 10^{n-k}2^{k-1} \pm 5^k$$
$$(x,y) = 10^{n-k}2^{k-1} \pm 3 \cdot 5^k$$
$$(x,y) = 10^{n-k}5^k \pm 2^{k-1}$$
$$(x,y) = 10^{n-k}5^k \pm 3{,}2^{k-1},$$

care represintă toate soluţiile ecuaţiei.

In acelaşi mod separăm şi *patratele gemene* de cele *pseudo-gemene* de specia I sau a 2-a.

Alăturăm un tablou cu formulele corespunzătoare pentru toate valorile lui a, precum şi valorile lui k pentru care avem *patrate gemene, pseudo-gemene* de specia I şi II-a.

a	$x^2,\ y^2$	k	*Patrate Pseudo Gem. II*	*Patrate Pseudo Gem. I*	*Patrate Gemene*
1	$10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 5 \cdot 10^8 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	8.9	5.6.7
	$10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 5 \cdot 10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.5	4.6.7.8	—
2	$10^{18-2k}2^{2k-2} \pm 10^9 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	5.8.9	6.7
	$10^{18-2k}5^{2k} \pm 10^9 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.6	5.7.8.9	—

a	$x^2,\ y^2$	k	*Patrate Pseudo Gem. II*	*Patrate Pseudo Gem. I*	*Patrate Gemene*
3	$9.10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 15.10^8 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	5.8.9	6.7
	$10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 15.10^8 + 9.5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	7.8.9	5.6
	$9.10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 15.10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.7	4.5.6.8	—
	$10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 15.10^8 + 9.2^{2k-2}$	k	1.2 3.5.7	4.6.8	—
4	$10^{18-2k}2^{2k} \pm 2.10^9 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	5.8.9	6.7
	$10^{10-2k}5^{2k-2} \pm 2.10^9 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.7	6.8	–
5	$25.10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 25.10^8 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4.5	8.9	6.7
	$10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 25.10^8 + 5^{2k+1}$	k	0.1.2.3.4	7.8.9	5.6
	$25.10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 25.10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.6.7	4.5.8	—
	$10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 25.10^8 + 25.2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.7	6.8	—
6	$9.10^{18-2k}2^{2k-2} \pm 3.10^9 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4.5.6.8	9	7
	$10^{18-2k}2^{2k-2} \pm 3.10^9 + 9.5^{2k}$	k	0.1.2.3.4	5.7.8.9	6
	$9.10^{18-2k}5^{2k} \pm 3.10^9 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.8 9	6.7	—
	$10^{18-2k}5^{2k} \pm 3.10^9 + 9.2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.6	7.8.9	—
7	$49.10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 35.18^8 + 5^{2k}$	k	0.1.2 3.4.6.7	8.9	—
	$10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 35.10^8 + 49.5^{2k}$	k	0.1.2.3.4.5.6.7.8.9	—	—
	$49.10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 35.10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.6.7.8.9	—	—
	$10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 35.10^8 + 49.2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.7	6.8	—
8	$10^{18-2k}2^{2k+2} \pm 4.10^9 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4.5.6.7.8	—	—
	$10^{22-2k}5^{2k-4} \pm 4.10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.6.7.8	—	—
9	$81.10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 45\ 10^8 + 5^{2k}$	k	0.1.2.3.4.5.6.7.8	9	—
	$10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 45.10^8 + 81.5^{2k}$	k	0.1.2 3.4.5.6.7.8.9	—	—
	$81.10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 45.10^8 + 2^{2k-2}$	k	1.2.3.4.5.6.7.8	—	—
	$10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 45.10^8 + 81.2^{2k-2}$	k	1.2.3.4 5.7	6.8	—
	$9\,(10^{18-2k}2^{2k-4} \pm 5.10^8 + 5^{2k})$	k	0 1.2.3.4.5.6.8.9	7	—
	$9\,(10^{16-2k}5^{2k+2} \pm 5.10^8 + 2^{2k-2})$	k	1.2.3.4.5.6.7.8	—	—

NOTE MATEMATICE

19. — *Numere interesante cu cifre diferite.*[1]

Fie S şi S_p suma cifrelor numerelor N şi N_p, definite în nota de la pagina 80 şi legate prin relaţiunele:

(1) $$N = p \times N_p.$$

Avem evident:

(2) $$S_p = S - p.$$

Cum:

$$S = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

N se divide prin 9, deci (1) arată că se poate avea:

1°. p multiplu de 9.

2°. p şi N_p multipli de 3.

3°. N_p multiplu de 9 şi p oarecare.

Cazul 1° nu poate da de cât $p = 9$, căci p este număr de o cifră.

Cazul 2° poate da $p = 3,6$ sau 9.

Cazul 3° este imposibil dacă $p \neq 9$, căci după (2), dacă N_p se divide cu 9, S_p se divide cu 9 şi deci urmează ca şi p să se dividă cu 9.

[1]) Continuarea notelor cu acelaşi titlu de la pag. 80 şi 92

Rezultă că nu se poate lua pentru p de cât multipli de 3. Soluţiile pentru $p = 3$ au fost date a pagina 92. Pentru $p = 6,9$ vom da soluţiile în numerile viitoare.

Se poate demonstra pe o cale independentă de relaţia (2), aşa cum s-a arătat la pagina 80, că pentru $p = 5$ nu avem soluţii.

G-L Gh. Buicliu

20. — *Sur le quadrilatère complet.*

1. Par les sommets A, B, C d'un triangle A B C et par trois points α, β, γ arbitrairement choisis sur les côtés B C, C A, A B, on fait passer trois circonférences $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$; puis, par A, B, C trois parallèles A L, B M, C N rencontrant ces circonférences en L, M, N.

On sait que les points L, M, N sont sur une même droite avec le point Σ commun aux trois circonférences.[1]

Si les points α, β, γ sont sur une droite Δ, la propriété subsiste, mais le point Σ est le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère complet (A B C, Δ). (Point de *Miquel*).

2. Soient H, H_a, H_b, H_c les orthocentres d'un triangle A B C et des triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ formés par une transversale Δ et les côtés B C, C A, A B; H'_a, H'_b, H'_c, par exemple, les intersections des hauteurs AH_a, BH_b, CH_c des triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ avec les cercles circonscrits à ces triangles.

Les droites AH_a, BH_b, CH_c, perpendiculaires sur Δ, sont parallèles, et, en vertu du théorème précédent, les points H'_a, H'_b, H'_c sont sur une droite Δ' avec le point Σ de *Miquel* du quadrilatère complet (A B C, Δ). Par analogie, les intersections des hauteurs A H, βH_c, γH_b des triangles A B C, $C\alpha\beta$, $B\gamma\alpha$ sont sur une droite Δ_a passant par Σ. On obtient de même deux autres Δ_b, Δ_c passant par Σ. Mais, les orthocentres (H_a, H_b, H_c), $(H, H_b, H_c), \ldots,$ sont symétriques des points $(H'_a, H'_b, H'_c), \ldots,$ par rapport aux droites Δ, B C, C A, A B. Les orthocentres (H_a, H_b, H_c) sont donc collinéaires ainsi que les orthocentres $(H, H_b, H_c), \ldots$ et les droites $\delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$ qui les portent coïncident. On retrouve ainsi ce théorème classique.

Les orthocentres des quatre triangles d'un quadrilatère complet (A B C, Δ) *sont collinéaires.*

N. B. Les droites Δ_a, Δ_b, Δ_c, par exemple, qui se coupent au point Σ, sont respectivement symétriques par rapport aux côtés B C, C A, A B du triangle A B C. Lorsque la transversale Δ varie, le triangle A B C restant fixe, la droite $\delta \equiv (H, H_a, H_b, H_c)$ passe constamment par l'orthocentre H du triangle A B C. Il en résulte cette proposition connue:

Les symétriques d'une droite δ qui tourne autour de l'orthocentre H *d'un triangle* A B C, *par rapport aux côtés* B C, C A, A B, *concourent en un point qui décrit le cercle circonscrit au triangle fondamental.*

V. Thébault
(Le Mans France)

21. — *Asupra notei matematice 18, din numărul trecut al „Revistei Matematice, Timişoara".*

In coloana a 2-a de la pagina 106 a numărului trecut, în egalităţile a 3-a, a 5-a, a 7-a, a 9-a, a 11-a şi 13-a se vor înlocui termenii al doilea din membrii al doilea, respectiv prin:

$$(-3)^2, \quad (-20)^2, \quad (-119)^2, \quad (-696)^2, \quad (-4059)^2$$

şi $(-23660)^2$,

cum reiasă de altfel şi din relaţia (1).

V. A.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 3, Noemvrie 1936. † Inginerul *Ion Popescu*. Dare de seamă asupra sărbătoririi d-lui Profesor *Ion Ionescu*, de Maior *I. Linteş*. O ediţie clujană a Compendiului lui *Ch. Wolff*, de *Victor Marian*. Câteva simple observaţiuni în legătură cu teorema lui *Van Vleck*, de Lt Comandor *Gh. Niculescu*. Programa analitică, hotărâtă pentru concursul „*Gazetei Matematice*", din anul 1937. Raport asupra premiului „*V. Conta*" pentru anul 1936, *O. Onicescu*, *Gh. Zapan*, *Gh. Iliescu*. Note matematice. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul IX, N-rile 7 şi 8, Buenos-Aires. Cunoştinţi asupra Mecanicei vectoriale şi relativiste a două medii deformabile, de *Teofil Vescan*. Contribuţii la studiul triunghiului (IV), de *B. I. Baidaff*. Curba logistică de *Ludovic Ivanissevich*. Reprezentarea geometrică a numerelor raţionale şi posibilitatea aritmetizării geome-

[1]) *Catalan, Mathesis*, 1890–264.

triei, de *Mario O. Gonzalez.* Cazuri speciale de ecuaţiuni simultane, de *Alfred Moessner.* Note, probleme rezolvate şi propuse.

3. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiintifică a liceelor mili tare, anul III, No. 6, Noemvrie 1936. Asupra determinanţilor de *N. N. Mihăileanu.* Sărbătorirea d-lui Prof. Ing. *Ion Ionescu*, de *N. O. Zaharia.* Japonia şi expansiunea sa în zona Pacificului, de Prof. *George Janet.* Oglinzile Sferice şi formula lui *Newton*, de *Traian Codreanu.* Publicaţii noui. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Numerus.* Vol. II, caietul 18, Noemvrie 1936. Aforisme matematice. Corespondenţă matematică. Chestiuni de examen. Probleme propuse. La géomètrie du triangle, par *Tr. Lalesco* (suite de la page 160).

5. *Societatea Română de Ştiinte.* Buletinul sedinţelor Activitatea secţiunilor Matematice, Fizice şi de Chimie.

6. *Revista Cercului de Studii al Şcoalei Superioare P. T. T, Timişoara*, anul V, N-rile 9—10, Septemvrie-Octomvrie 1936 (litografiat). Afară de articole de specialitate, conţine şi probleme propuse şi rezolvate.

7. *Ovidiu N. Ţino. Algebră elementară pentru cl. IV-a secundară.* Cartea prezintă multe calităţi didactice, preocuparea autorului fiind la fiecare pas folosirea metodei intuitive, în locul definiţiilor abstracte. Unele identităţi algebrice sunt stabilite foarte simplu pe cale geometrică, ceeace le fixează mai bine în mintea elevilor, lucru care nu se găseşte în alte cărţi de la noi. Sunt apoi foarte multe aplicaţiuni şi probleme care să fortifice raţionamentul şi abilitatea de calcul. Cartea este sortită a fi de mare folos elevilor cărora se adresează.

8. *Nicolas Théodoresco. La Dérivée aréolaire.* (Annales Roumaines de Mathématique, Cahier 3, 1936.)

9. *Mateescu Ştefan.* Vulcanismul cuaternar din partea de Nord-Vest a Banatului. (Extras din Revista Muzeului Geologic-Mineralogic al Univ. din Cluj, vol. VI, 1936.)

10. *I. Lepşi.* Buletinul muzeului naţional de istorie naturală din Chişinău.

PROBLEME REZOLVATE

54. — *Se dă un triunghiu* ABC. *Pe latura* AC *se ia un punct* D *oare-care prin care se duc paralele respectiv la* AB *şi* BC, *care taie pe* BC *în* E *şi pe* AB *în* F. *Fie* O *un punct pe dreapta* BC *aşa fel ca:*

$$\overline{OE}^2 = \overline{OB} \times \overline{OC}.$$

Dreapta OA *taie pe* DF *şi* DE *respectiv în* G *şi* H. *Să se demonstreze:*

1. *Că avem relaţiunea:*

$$\overline{GO}^2 = \overline{GA} \times \overline{GH}.$$

2. *Că aria* OAD = *aria* ODE.

M. NICOLAU

Din relaţiunea dată se deduce:

$$(1) \qquad \frac{OB}{OE} = \frac{OE}{OC}.$$

Insă AB, HE fiind paralele:

$$(2) \qquad \frac{OB}{OE} = \frac{OA}{OH}$$

şi ţinând seamă de (1), rezultă că AE şi HC sunt paralele. Apoi de pe figură se vede că:

$$(3) \qquad \frac{GH}{GO} = \frac{DH}{DE} = \frac{HC}{AE}$$

$$(4) \qquad \frac{C'A}{GO} = \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{HC}.$$

De unde prin înmulţirea lui (3) cu (4)

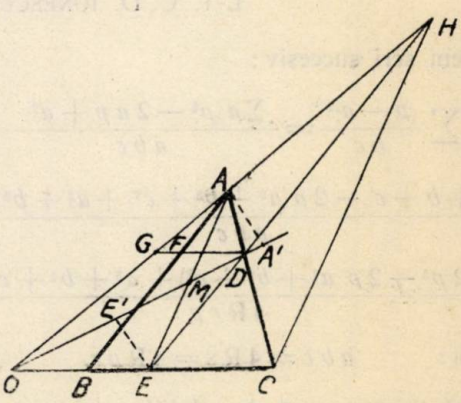
$$\frac{GH}{GO} \times \frac{GA}{GO} = \frac{HC}{AE} \times \frac{AE}{HC} = 1$$

$$\overline{GO}^2 = \overline{GA} \times \overline{GH}$$

***

ceiace demonstrează prima parte a problemei.

2. Prin construcţie rezultă că AD este mediană în triunghiurile OAE, OHC. Dacă M este inter-



secţia lui OD cu AE (deci mijlocul lui AE), iar A', E' proecţiile lui A, E pe mediana OM se vede imediat că triunghiurile dreptunghice AA'M, EE'M sunt egale, deci:

$$AA' = EE'.$$

Triunghiurile O A D, O D E având baza O D comună şi înălţimile egale sunt echivalente deci:

$$aria\ O\,A\,D = aria\ O\,D\,E.$$

A dat această soluţie d-l *Ghiţescu Virgil* (Bucureşti).

D-l *Georgescu-Val N. I.* a dat o bună soluţie analitica.

165. — *Cât cocs este necesar pentru reducerea teoretică a 5000 kgr. fer oligist* (Fe_2O_3) *la fer metalic?*

C. CANDEA

Avem ecuaţia:

$$Fe_2O_3 + 2C = 2Fe + CO + CO_2$$

$$160 + 24 = 112 + 28 + 44.$$

Şi atunci, dacă x este cantitatea de cocs în Kgr. următoarea regulă de trei, dă soluţia problemei:

Pentru 160 Kgr. Fe_2O_3 este necesar 24 Kgr. C

„ 5000 „ „ „ „ „ x „ C

$$x = \frac{5000 \times 24}{160} = 750 \text{ Kgr. cocs.}$$

1448. — *Să se stabilească următoarea relaţie:*

$$\sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{2R-r}{2R},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

L-T. C. D. IONESCU-ŢIU

Putem scri succesiv:

$$(1)\quad \sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{\sum a(p^2 - 2ap + a^2)}{abc} =$$

$$\frac{p^2(a+b+c) - 2p(a^2+b^2+c^2) + a^3+b^2+c^2}{abc} =$$

$$\frac{2p^3 - 2p(a^2+b^2+c^2) + a^3+b^3+c^3}{4Rrp},$$

fiindcă: $abc = 4Rs = 4Rpr.$

Dacă ţinem seamă de relaţiile cunoscute:

$$a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$

$$a^3+b^3+c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

(*„Gazeta Mctematică“*, vol. XXXVIII, pag. 249—250), atunci relaţiunea (1) se mai poate scri succesiv în urma simplificărilor:

$$\sum \frac{(p-a)^2}{bc} =$$

$$\frac{2p^3 - 2p(2p^2 - 2r^2 - 8Rr) + 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{2Rr} =$$

$$= \frac{2Rr - r^2}{2Rr} = \frac{2R-r}{2R}.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Bucur N. Virgiliu* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Rosemberg I.* (lic. Roman).

Soluţia autorului. Consider triunghiul A B C, I centru cercului înscris şi D, E, F punctele de contact. Fie S_a, S_b, S_c suprafeţele triunghiurilor A F E, B F D, C D E; S_1 suprafaţa triunghiului D E F şi S a triunghiului A B C.

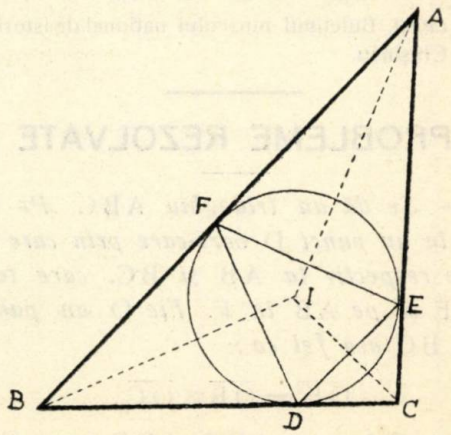
Fiindcă, după cele ştiute:

$$AF = AE = p - a, \quad BD = BF = p - b,$$

$$CD = CE = p - c,$$

putem scri:

$$\frac{S_a}{S} = \frac{(p-a)^2 \sin A}{2} : \frac{bc \sin A}{2} = \frac{(p-a)^2}{bc},$$



deci:

$$(1)\quad \frac{S_a + S_b + S_c}{S} = \sum \frac{(p-a)^2}{bc}.$$

De altă parte:

$$(2)\quad \frac{S_1}{S} = \sum \frac{\text{supr. I E F}}{S} = \sum \frac{r^2 \sin A}{2S} =$$

$$\frac{r^2}{2S} \sum \frac{a}{2R} = \frac{r^2 . 2p}{4RS} = \frac{r}{2R}.$$

Observând figura şi ţinând seamă de (2), avem încă:

$$(3)\quad \frac{S_a + S_b + S_c}{S} = \frac{S - S_1}{S} = 1 - \frac{S_1}{S} =$$

$$1 - \frac{r}{2R} = \frac{2R - r}{2R}.$$

Din relaţiile (1) şi (3) deducem:

$$\sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \frac{2R - r}{2R},$$

care este relaţia cerută.

1449. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare şi diferite, ştiind că ultima cifră este egală cu suma primelor trei, iar prima şi ultima sunt divizibile prin 3.*

D-TRU D. MATEIU

Fie $abcd$ patratul cerut cu cifre însemnătoare. Conform enunţului trebuie să avem:

$$(1)\quad d = a + b + c, \quad a = \text{mult. } 3, \quad d = \text{mult. } 3.$$

De aci deducem:

$$(2)\quad a + b + c + d = d + d = 2d = 2 \text{ mult. } 3 \leqq 18.$$

$abcd$ este astfel divizibil prin 3 şi fiind patrat perfect, trebuie să fie divizibil şi prin 9, ceea ce ne obligă, privind relaţia (2), să luăm:

$$d = 9.$$

Patratul cerut, cu cifre însemnătoare, ţinând seamă de (1), este de forma:

$$(3)\qquad 3bc9, \qquad \text{cu:} \quad b + c = 6$$

sau:

$$4)\qquad 6bc9, \qquad \text{cu:} \quad b + c = 3.$$

Dar terminaţiile de două cifre însemnătoare ale unui patrat perfect terminat cu 9, sunt:

29, 49, 69.

Astfel rezultă din (3) şi (4), că patratul cerut este de forma:

3429, 3249, 6129.

Dintre aceste numere numai 3249 este patrat perfect:

$$3249 = 57^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Observare. Putem suprima din enunţ cuvintele *„şi diferite"*, de care nu ne-am folosit în demonstraţie.

Soluţii date de d-rele: *Naneş Cornelia* (studentă, Bucureşti), *Savin Maria* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Negulescu Şt.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P Marin* (Sub-Lt) şi *Zaigaran Ilie* (Conductor de L. P.)

1451. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + yz + zx + b^2 = 3a^2 \\ (x+y)(y+z)(z+x) + 2ab^2 = 8a^3 \end{cases}$$

I. V. MATIES

In baza identităţii:

$$(x+y)(y+z)(z+x) + xyz =$$
$$(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

şi ţinând seamă de primele două ecuaţii ale sistemului dat, ecuaţia 3-a se mai poate scri:

$$3a(3a^2 - b^2) - xyz = 8a^3 - 2ab^2.$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + yz + zx = 3a^2 - b^2 \\ xyz = a(a^2 - b^2) \end{cases}$$

Având cunoscute suma lui x, y, z, suma produselor lor câte două şi produsul lor, rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 3-lea:

$$t^3 - 3at^2 + (3a^2 - b^2)t - a(a^2 - b^2) = 0,$$

sau:

$$(t-a)^3 - b^2(t-a) = 0.$$

Această ecuație se mai descompune astfel:

$$(t-a)[(t-a)^2-b^2]=$$
$$(t-a)(t-a-b)(t-a+b)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuații, deci sistemele de soluții a sistemului dat sunt:

x	a	a	$a+b$	$a+b$	$a-b$	$a-b$
y	$a+b$	$a-b$	a	$a-b$	a	$a+b$
z	$a-b$	$a+b$	$a-b$	a	$a+b$	a

Soluții date de d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iași) și de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzești, Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit, Craiova), *Curcă Gh. C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Victor* (student, Cluj), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iași), *Mişca C. Kivu* (lic. Focșani), *Moisovici Ştefan* (Colegiul Carol I, Craiova), *Murgu V. Marțian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu A. Gavril* (bacalaureat), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stoica N. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Tica P. Marin* (Sub-Lt) și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș).

1452. — *Să se afle rădăcinele sistemului*:

$$\begin{cases} x^3+y^3+3x(x+1)+3y(y+1)=a \\ y^3+z^3+3y(y+1)+3z(z+1)=b \\ z^3+x^3+3z(z+1)+3x(x+1)=c \end{cases}$$

ION MARGINEANU

Observăm că sistemul dat se mai poate scri:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x+1)^3+(y+1)^3=a+2 \\ (y+1)^3+(z+1)^3=b+2 \\ (z+1)^3+(x+1)^3=c+2. \end{cases}$$

Adunând aceste ecuații, simplificând cu 2 și scăzând din ecuația astfel obținută pe rând toate ecuațiile sistemului (1), găsim:

$$\begin{cases} (z+1)^3=\dfrac{b+c-a+2}{2} \\ (x+1)^3=\dfrac{a-b+c+2}{2} \\ (y+1)^3=\dfrac{a+b-c+2}{2} \end{cases}$$

De aci deducem următoarele 27 sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x_k=-1+\sqrt[3]{\dfrac{a-b+c+2}{2}}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right) \\ y_{k'}=-1+\sqrt[3]{\dfrac{a+b-c+2}{2}}\left(\cos\dfrac{2k'\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k'\pi}{3}\right) \\ z_{k''}=-1+\sqrt[3]{\dfrac{b+c-a+2}{2}}\left(\cos\dfrac{2k''\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k''\pi}{3}\right), \end{cases}$$

unde k, k', k'' iau oricare din valorile 1, 2, 3 în toate modurile posibile.

Soluții date de d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iași) și de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Matei D. D-tru*, *Murgu V. Marțian*, *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin* (Sub-Lt) și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș).

1453. — *Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu dreptunghiu și dacă notăm*:

$$A=\frac{b}{b-c},\qquad B=\frac{c}{a+b+c},$$

atunci avem identitatea:

$$A=\frac{1-2B}{1-4B+2B^2}.$$

MARCEL F. AMARASTEANU

Dacă ținem seamă de relația:

$$a^2=b^2+c^2,$$

dintr'un triunghiu dreptunghiu, putem scri succesiv:

$$\frac{1-2B}{1-4B+2B^2}=\frac{1-\dfrac{2c}{a+b+c}}{1-\dfrac{4c}{a+b+c}+\dfrac{2c^2}{(a+b+c)^2}}=$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b+c)^2-4c(a+b+c)+2c^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b-c)^2-2c^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{a^2+b^2-c^2+2ab-2ac-2bc}$$

$$=\frac{2b^2+2ab}{2b^2+2ab-2ac-2bc}$$

$$=\frac{b(b+a)}{b(b+a)-c(b+a)}=\frac{b}{b-c}=A.$$

Soluții date de d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iași) și de d-nii: *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chișinău), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit.,

Craiova), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian*, *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Popoviciu I. Gavrilă* (bacalaureat) şi *Tica P. Marin* (Sub-Lt).

1456. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$r^2 \prod (r_a - r_b) = 2R^2 \prod (h_b - h_a)$$

MARICA POMPEIU

Folosind relaţiile cunoscute într'un triunghiu oarecare:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b},$$

$$S^2 = p(p-a)(p-a)(p-c),$$

putem scri succesiv:

$$(1) \quad r^2 \prod (r_a - r_b) = \frac{S^2}{p^2} \prod \left(\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p-b} \right) =$$

$$\frac{S^5}{p^2} \prod \frac{a-b}{(p-a)(p-b)} =$$

$$\frac{S^5}{p^2 (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2} \prod (a-b) = S \prod (a-b).$$

De altă parte, având în vedere şi relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$a h_a = b h_b = 2S, \qquad a b c = 4RS,$$

putem scri încă:

$$(2) \quad 2R^2 \prod (h_b - h_a) = 2R^2 \prod \left(\frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} \right) =$$

$$16R^2 S^3 \prod \frac{a-b}{ab} = \frac{16R^2 S^3}{a^2 b^2 c^2} \prod (a-b) =$$

$$\frac{16R^2 S^3}{16R^2 S^2} \prod (a-b) = S \prod (a-b).$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), rezultă:

$$r^2 \prod (r_a - r_b) = 2R^2 \prod (h_b - h_a),$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Apostol Radu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic Milit., Craiova), *Cristea G Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu). *Gloden A.* (Luxembourg), *Lăzărescu P. Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D-tru* (lic Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N, Filipescu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin* (Sub-Lt) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

1462. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\left(x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right)' = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

unde $[f(x)]'$ *înseamnă derivata funcţiunei* $f(x)$.

V. ALACI

Efectuând derivata putem scri:

$$1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

sau:

$$1 - \frac{2}{3\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}.$$

Aceasta ecuaţie se mai poate scri:

$$1 - \frac{2}{1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

sau:

$$1 - \frac{2}{2 + \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}.$$

De aci deducem:

$$\frac{\cos x}{2 + \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

sau scăzând numărătorii din numitori, în ambii membrii, obţinem:

$$\frac{\cos x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

adică:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0.$$

Rezultă, că rădăcinele ecuaţiei date sunt:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Gloden A.* (Luxembourg), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Lupescu*

Gh. Corneliu (Şc. Of. de Artilerie), *Marica I. Horia* (lic. Cluj), *Mateiu D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Smolinschi A.* (lic. Cernăuţi), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ţica P. Marin* (Sub-Lt) şi *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş).

PROBLEME PROPUSE

1537. — O persoană observă că anul ei de naştere este produsul între numerile ce reprezintă vârsta sa acum şi anul trecut. Care este anul de naştere?

C-TIN TEODORESCU

1538. — In ce sistem de numeraţie, un număr de patru cifre de forma $abba$ poate fi patratul unui număr de două cifre cc, fiind dat că a, b, c trebuesc să fie numere impare consecutive?

V. THÉBAULT

1539. — Să se arate că nu pot exista patrate şi cuburi de forma:

$abab$; $abcabc$; $abcdabcd$; $abcdeabcde$.

IOAN CUREA

1540. — Să se stabilească identitatea:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{b+d}\right)^4-\left(\frac{a-b+c-d}{b+d}\right)^4 = 8\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^3+8\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$$

MARCEL F. AMARASTEANU

1541. — Să se stabilească identităţile:

$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2+\Sigma(a^2-c+b)^2 = [(b-c)(c-a)-a+b]^2+\Sigma(a^2+c-b)^2;$$

$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2+\Sigma(ab-b+a)^2 = (b-c)(c-a)-a+b]^2+\Sigma(ab+b-a)^2;$$

$$[a+b+c+(a-b)(b-c)(c-a)]^2+\Sigma(a^3-c+b)^2 = [a+b+c-(a-b)(b-c)(c-a)]+\Sigma(a^3+c-b)^2;$$

$$[ab+bc+ca+(b-c)(c-a)(a-b)]^2+\Sigma(a^2b^2-b+a)^2 = [ab+bc+ca-(b-c)(c-a)(a-b)]^2+\Sigma(a^2b^2+b-a)^2$$

A. GLODEN

1542. — Pe o dreaptă Δ se dau punctele M, N, P, Q. Să se arate cum se poate construi un trapez ale cărui diagonale şi ale cărui laturi neparalele îşi au mijloacele în cele patru puncte date.

G-L GH. BUICLIU

1543. — Se consideră o sferă şi pe ea un cerc determinat de un plan secant dus la o distanţă a de centrul sferei. Să se determine a astfel ca volumul cuprins între sferă şi semisfera exterioară descrisă pe cercul de secţiune să fie maxim.

D-TRU GEORGESCU

1544. — Se cere să se elimine unghiurile A, B, C ale unui triunghiu, din relaţiile:

$$\alpha=\frac{\sin A}{\sin A+\cos A},\quad \beta=\frac{\sin B}{\sin B+\cos B},$$

$$\gamma=\frac{\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

V. ALACI

1545. — Se cunosc următorii vectori:

$$\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \bar{m},\ \bar{n},\ \bar{p},\ \bar{\mathcal{F}}_1,\ \bar{\mathcal{F}}_2,\ \bar{\mathcal{F}}_3\ ^{1)}$$

situaţi în acelaş plan, având aceiaşi origine şi satisfăcând condiţiile:

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$$
$$\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}=0$$
$$[\bar{m}\,\bar{a}]=[\bar{n}\,\bar{b}]=[\bar{p}\,\bar{c}]=\bar{l}$$
$$\bar{\mathcal{F}}_1+\bar{\mathcal{F}}_2+\bar{\mathcal{F}}_3=0.$$

Se formează următoarele produse scalare:

$(\bar{a}\,\bar{\mathcal{F}}_1)$, $(\bar{b}\,\bar{\mathcal{F}}_2)$, $(\bar{c}\,\bar{\mathcal{F}}_3)$, $(\bar{m}\,\bar{\mathcal{F}}_1)$, $(\bar{n}\,\bar{\mathcal{F}}_2)$, $(\bar{p}\,\bar{\mathcal{F}}_3)$,

şi se întreabă în ce ordine se vor înmulţi scalarele $(\bar{a}\,\bar{\mathcal{F}}_1)$, $(\bar{b}\,\bar{\mathcal{F}}_2)$, $(\bar{c}\,\bar{\mathcal{F}}_3)$ cu vectorii unitari $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, pentruca suma celor trei vectori astfel formaţi, să dea un vector egal cu vectorul rezultând din suma vectorilor unitari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ înmulţiţi cu scalarele:

$$(\bar{m}\,\bar{\mathcal{F}}_1),\quad (\bar{n}\,\bar{\mathcal{F}}_2),\quad (\bar{p}\,\bar{\mathcal{F}}_3),$$

luate în aceiaşi ordine ca scalarele de mai sus.

PL ANDRONESCU

[1]) Vectorii sunt reprezentaţi prin litere cursive, iar scalarile prin litere de tipar. Vectorii unitari au o liniuţă deasupra. Produsul scalar e indicat prin : ( ), iar cel vectorial prin : [ ].

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andronachi Virgil (1521), *Apostol Gh. Nicolae* (1517), *Babeţiu Corneliu* (P., 1521), *Boborodea I. Ioan* (1521), *Bosoldea Gr. Grigore* (1517), *Buiculescu C. Radu* (1513), *Comloşan Cornelia* (1493, 1520, 1521, 1526), *Cracia G Gr.* (1500), *Cristocea Gh. Nicolae* (1513, 1522, 1529), *Davidovici Paul* (1473, 14 0, 1484, 1487, 1494, 1505, 1513, 1517, 1521, 1522), *Dăscălescu Hristache* (1465, 1467, 1469, 1470), *Deciulescu D. Gh.* (1497, 1517, 1520, 1521, 1526), *Heroiu N. Spiridon* (1497, 1521), *Horga Leon* (1404), *Jidanu I. C-tin* (P., 1386), *Lăzărescu Stèlian* (1509, 1526), *Maşcas Gh. Petru* (1506, 1517, 1521), *Matei D. D-tru* (P., 1497, 1500, 1503, 1520), *Munteanu V. Lazăr* (1521), *Murgu V. Marţian* (P., 1405, 1463, 1465, 1467, 1470, 1473, 1476). *Nedelcu V. Nicolae* (1513, 1515, 1516, 1517), *Negrea A. Leonte-Mircea* (1398, 1496, 1513, 1515, 1516, 1517, 1519, 1520, 1521, 1524, 1535), *Negulescu V. Ştefan* (1497), *Nistorescu V. Dan* (1513, 1515, 1516, 1517), *Olaru Eugen* (P., 1467, 1470, 1471, 1473), *Pasere Emil* (1476), *Petrescu Mihai* (1515, 1516), *Popescu Zorica N. Alexandru* (P., 1512, 1519, 1528), *Popoviciu I. Gavril* (P., 1465, 1473, 1476), *Stamate I. Ionel* (1505, 1513, 1520, 1521), *Ştefănescu D. Nicolae* (1379), *Sternberg H.* (1521, 1522), *Stoenescu D. Mirel* (1513, 1521), *Teodorescu Dorin* (1513, 1521), *Thébault V.* (A., N., P.), *Vlad I. C. M.* (1466, 1493, 1520, 1521, 1526).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA
care a început în Martie 1936.

Costul *special* a unui abonament fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina, şi sunt abonaţi la ea din ţară de la noi, d-nii: Ing. *I. S. Antoniu;* Prof. *G. G. Constantinescu;* Locot. *F. Ionescu-Ţiu;* Prof. *N. N. Mihăileanu*; Prof. *I. Nemeţ;* Dr. *P. Sergescu*; Asist. Univ. *T. Vescan* şi Locot-Comandor *Gr. Zapan.*

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XVI. 15 IANUARIE 1937 NO. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. THÉBAULT SUR L'ÉQUATION DOUBLE:
(1) $X^2 + X + 1 = \alpha x^2$, (2) $X^2 - X + 1 = \beta y^2$.

2 CAIUS IACOB ASUPRA PROBABILITATII CARE O ARE UN ELEV DE A FI ADMIS LA UN EXAMEN.

2. NOTE MATEMATICE: 22, 23, 24.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 248, 916, 1463, 1464, 1468.

5. PROBLEME PROPUSE: 1546-1552.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — No. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR L'ÉQUATION DOUBLE:

(1) $X^2+X+1=\alpha x^2$, (2) $X^2-X+1=\beta y^2$

PAR V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

1. Ces deux équations, qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers, sont des cas particuliers des suivantes:

(3) $$X^2+XY+Y^2=k m^2$$

(4) $$X^2-XY+Y^2=l n^2,$$

dans lesquelles $Y=1$.

Or, on sait que tous les diviseurs de (3) et (4), et par suite de chacun des membres des équations (1) et (2) sont des nombres premiers de la forme $6\lambda+1$ ou le facteur exceptionnel 3.

2. Au moyen de tables de factorisations des nombres [1]

$$X^2+X+1=\frac{X^3-1}{X-1} \qquad X^2-X+1=\frac{X^3+1}{X+1},$$

on découvre assez facilement des solutions communes aux équations (1) et (2).

Le cas particulier où le facteur 3 divise les membres de l'une des équations proposées permet un raisonnement direct assez simple.

Dans cette hypothèse, si on a, par exemple:

$$X^2+X+1=3x^2,$$

on encore:

$$(2X+1)^2+3=3(2x)^2,$$

et enfin:

$$(2X+1)^2=[(2x)^2-1]=3(2x-1)(2x+1),$$

et que l'on pose:

$$2x+1=p^2, \qquad 2x-1=q^2,$$

on a l'équation:

$$q^2-3p^2=-2$$

dont les premières solutions entières sont:

$p=1,\ 3,\ 11,\ 41,\ 153,\ldots;\quad p_{n+1}=4p_n-p_{n-1}$

$q=1,\ 5,\ 19,\ 71,\ 265,\ldots;\quad q_{n+1}=4q_n-q_{n-1}.$

On en déduit les premières valeurs de x et X:

$$x=\frac{1}{4}(3p^2+q^2)=$$

$1,\ 13,\ 181,\ 2521,\ 35113,\ldots;\quad x_{n+1}=14x_n-x_{n-1}$

$$X=\frac{1}{2}(3pq-1)=$$

$1,\ 22,\ 313,\ 4366,\ 60817,\ldots;\quad X_{n+1}=14X_n-X_{n+6}.$

En outre, l'équation:

$t^2-3u^2=1,\ t=1,2,7,26,\ldots;\ u=0,1,4,15,\ldots$

donne aussi:

$$p_n=t_n+u_n, \qquad q_n=2t_n+u_n+u_{n-1}.$$

Pour trouver les solutions communes aux équations (1) et (2), il reste à vérifier directement les cas où l'équation (2) est de la forme βy^2, les nombres β, y^2, y étant de la forme $6\lambda+1$ et $y\neq 1$.

Ainsi, $X=22$ ne convient pas, mais $X=313$ donne une solution:

$313^2+313+1=3.181^2,\ 313^2-313+1=1993.7^2.$

Ensuite, $X=4366$ ne convient pas, car:

$4366^2-4366+1=19057591=7.2722513\ldots.$

3. Voici d'autres solutions des équations proposées. [2]

[1]) Cfr. *M. Kraïtchik, Théorie des nombres*, 1929 pp. 152 à 157, où X est un nombre premier inférieur à 10^3.

[2]) Ces solutions sont extraites d'une table de factorisations que nous a communiquée M *A. Gérardin* (Nancy)

X	α	x	β	y
68	13	19	93	7
313	3	181	1993	7
361	3.889	7	769	13
423	97	43	3643	7
521	283	31	3.19.97	7
1206	29707	7	8599	13
1881	20947	13	72169	7
2235	101989	7	13831	19
2726	43987	13	3.50533	7
3902	42187	19	3.103549	7
5421	367	283	599629	7
5555	629869	7	3.60853	13
6205	3 13357	31	785629	7
7075	3.98743	13	1021399	7
7289	314419	13	3.49051	19
7920	371209	13	1279969	7
7956	1291957	7	10141	79
8459	13429	73	3.486709	7
8642	1524343	7	3.147289	13
9487	3.612331	7	532507	13

N. B. Observant que $361 = 19^2$, $Z = 19$ est une solution de l'équation double:

$$Z^4 + Z^2 + 1 = \alpha x^2 \qquad Z^4 - Z^2 + 1 = \beta y^2.$$

4. Nous avons été conduit à résoudre les équations (1) et (2) à propos de recherches sur des carrés de six chiffres de la forme $ababab$ dans certains systèmes de numération.[3]

En effet, le nombre:

$$N = ababab = M^2$$

peut s'écrire:

$$N = ab(X^4 + X^2 + 1) =$$

$$ab(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = M^2,$$

X étant la base du système de numération.

Nous avons obtenu les carrés suivants:

$$N_1 = \overline{12}\ \overline{09}\ \overline{12}\ \overline{09}\ \overline{12}\ \overline{09} \qquad (X = 68)$$

$$N_2 = \overline{48}\ \overline{36}\ \overline{48}\ \overline{36}\ \overline{48}\ \overline{36} \qquad (X = 68)$$

$$N_3 = \overline{59}\ \overline{79}\ \overline{59}\ \overline{79}\ \overline{59}\ \overline{79} \qquad (X = 313)$$

$$N_4 = \overline{353}\ \overline{371}\ \overline{353}\ \overline{371}\ \overline{353}\ \overline{381} \qquad (X = 423).$$

5. Pour terminer, nous attirons l'attention du lecteur sur l'équation double:

$$X^2 + X + 1 = \alpha x^3 \qquad X^2 - X + 1 = \beta y^3.$$

Exemple.[4] Lorsque $X = 348163$,

$$348163^2 + 348163 + 1 = 353404731.7^3$$

$$348163^2 - 348163 + 1 = 55173931.13^3.$$

[3] *V. Thébault*, *Mathesis* (supplément—Novembre 1936).

ASUPRA PROBABILITĂȚII PE CARE O ARE UN ELEV DE A FI ADMIS LA UN EXAMEN.

De Caius Iacob

Se numește *probabilitate* a unui eveniment, raportul dintre numărul cazurilor favorabile producerii acestui eveniment și numărul cazurilor posibile, cu condiția ca toate cazurile posibile să fie egal de probabile.

In cele ce urmează, noi ne propunem să rezolvăm câteva probleme elementare în legătură cu probabilitatea pe care o are un elev de a fi admis la un examen.[1]

Problemă. *Un profesor cere elevilor săi să cunoască m chestiuni; la oral el pune fiecăruia n chestiuni din cele m. Un elev a studiat numai m_1 ($m_1 \leq m$) chestiuni din cele cerute. Care este probabilitatea ca el să știe răspunde la n_1 ($n_1 \leq n$) chestiuni de ale profesorului? Care este probabilitatea de a ști să răspundă la cel puțin n_1 chestiuni?* (Se presupune evident că avem inegalitățile $n - n_1 \leq m - m_1$ și $n_1 \leq m_1$).

Soluția acestei probleme este simplă. Pentru a evalua numărul cazurilor posibile, trebue să vedem în câte feluri distincte poate profesorul să pună elevului cele n chestiuni. Cum ordinea în care sunt puse chestiunile nu interesează, ci numai natura lor, se vede imediat că avem C_m^n cazuri posibile. Pentru cercetarea numărului cazurilor favorabile,

[4] Cette solution est due à M. *A. Gérardin.*

[1] O parte din aceste probleme le-am propus, în cazuri particulare, la cursul de Algebră, pe care-l profesez la Școala de Ofițeri de Artilerie din Timișoara.

va trebui să căutăm câte din cele C_m^n serii de chestiuni, conţin n_1 din cele m_1 studiate de elev. Cu alte cuvinte, trebue să căutăm câte din combinările de m obiecte luate câte n, conţin n_1 obiecte luate dintr'un grup de m_1. Aceste grupări se pot obţine formând întâiu combinările din cele m_1 obiecte luate câte n_1 şi apoi adăugând la fiecare grupare, o combinare din cele $m - m_1$ obiecte rămase luate câte $n - n_1$. Se constată uşor că obţinem astfel toate grupările dorite şi numai pe acelea. Avem în total $C_{m_1}^{n_1} \cdot C_{m-m_1}^{n-n_1}$ grupări, deci tot atâtea cazuri favorabile elevului. Rezultă de aici, că probabilitatea pe care o are elevul de a şti să răspundă la n_1 chestiuni din cele n, este:

$$(1) \qquad p_{m_1}^{n_1} = \frac{C_{m_1}^{n_1} \cdot C_{m-m_1}^{n-n_1}}{C_m^n}.$$

Pentru ca elevul să răspundă la cel puţin n_1 chestiuni, trebue ca el să răspundă la n_1 chestiuni sau la n_1+1, n_1+2, ... sau la s chestiuni, s fiind cel mai mic din numerele n şi m_1. Numărul cazurilor posibile este acelaş ca mai înainte; numărul cazurilor favorabile este însă:

$$\sum_{j=n_1}^{s} C_{m_1}^{j} \cdot C_{m-m_1}^{n-j}.$$

Deci probabilitatea ca elevul să ştie să răspundă la cel puţin n_1 chestiuni este[2]:

$$(2) \qquad P_{m_1}^{n_1} = \frac{\sum_{j=n_1}^{s} C_{m_1}^{j} \cdot C_{m-m_1}^{n-j}}{C_m^n}.$$

Probabilitatea evenimentului contrar, este evident egală cu $1 - P_{m_1}^{n_1}$ sau încă, cum se constată uşor, cu:

$$(3) \qquad Q_{m_1}^{n_1} = \frac{\sum_{j=r}^{n_1-1} C_{m_1}^{j} \cdot C_{m-m_1}^{n-j}}{C_m^n},$$

r fiind egal cu cel mai mare dintre numerele $n-(m-m_1)$ şi 0. Se deduce de aici identitatea:

$$(4) \qquad C_m^n = \sum_{j=r}^{s} C_{m_1}^{j} \cdot C_{m-m_1}^{n-j}.$$

[2]) Se deduce de aici imediat soluţia problemei 1698 din „Gazeta Matematică", vol. XVII sau din „Culegerea de probleme de Algebră" a D-lui *A. G. Ioachimescu;* (ediţia 2-a, XXV, 33).

Observare. Formula (1) s'ar fi putut deduce şi prin aplicarea principiului probabilităţilor totale şi compuse. Intr'adevăr, probabilitatea pe care o are elevul de a răspunde la n_1 chestiuni ale profesorului *într'o anumită ordine*, este

$$\frac{C_{m_1}^{n_1}}{C_m^n};$$

probabilitatea de a nu şti răspunde la celelalte $n - n_1$ chestiuni puse din grupul de $m - n_1$ rămase la dispoziţia profesorului, este:

$$\frac{C_{m-m_1}^{n-n_1}}{C_{m-n_1}^{n-n_1}}.$$

Din probabilitatea pe care o are elevul de a răspunde la n_1 chestiuni puse într'o anumită ordine faţă de celelalte este, aplicând principiul probabilităţilor compuse:

$$(5) \qquad (p)_{m_1}^{n_1} = \frac{C_{m_1}^{n_1}}{C_m^{n_1}} \cdot \frac{C_{m-m_1}^{n-n_1}}{C_{m-n_1}^{n-n_1}}.$$

Ea este aceiaşi oricare e ordinea impusă răspunsurilor favorabile. Probabilitatea pentru ca elevul să ştie să răspundă la n_1 chestiuni şi numai la n_1, *într'o ordine oarecare,* se obţine înmulţind probabilitatea precedentă, cu numărul felurilor în cari putem ordona cele n_1 răspunsuri favorabile printre cele n. Acest număr este egal cu al permutărilor cu repetiţie a două obiecte, primul fiind luat de n_1-ori, iar al doilea de $(n - n_1)$-ori. Vom avea deci:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = C_n^{n_1} \quad \text{cazuri},$$

aşa încât probabilitatea căutată este egală şi cu:

$$(6) \qquad p_{m_1}^{n_1} = \frac{C_{m_1}^{n_1}}{C_m^{n_1}} \cdot \frac{C_{m-m_1}^{n-n_1}}{C_{m-n_1}^{n-n_1}} \cdot C_n^{n_1}.$$

Comparând expresiile (1) şi (6) se deduce, în treacăt, identitatea:

$$C_n^{n_1} \cdot C_m^n = C_m^{n_1} \cdot C_{m-n_1}^{n-n_1}.$$

Aplicaţie numerică. Să luăm $m = 20$, $n = 3$, $m_1 = 15$, $n_1 = 2$. Vom avea:

$$p_{15}^2 = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^1}{C_{20}^3} = \frac{5.7}{4.19} = \frac{35}{76} < \frac{47}{100}$$

$$(p)_{15}^2 = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^1}{C_{20}^2 \cdot C_{18}^1} = \frac{5.7}{3.4.19} = \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{76}$$

$$P_{15}^{2} = \frac{C_{15}^{2} \cdot C_{5}^{1} + C_{15}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{49}{57} = 0{,}85.$$

Relaţia (4) devine în acest caz, $(r = 0,\ s = 3)$,

$$C_{20}^{3} = C_{5}^{3} + C_{15}^{1} \cdot C_{5}^{2} + C_{15}^{2} \cdot C_{5}^{1} + C_{15}^{3}.$$

O generalizare imediată a problemei tratate o constitue următoarea.

Problemă. *Materia unui curs este împărţită în p capitole. Un profesor examinând pe un elev, îi pune N_i chestiuni din cele M_i pe care le are la dispoziţie pentru fiecare capitol $(i = 1, 2, \ldots p)$. Elevul a învăţat numai m_i chestiuni din fiecare capitol $(m_i \leqq M_i)$. Care este probabilitatea pentru ca, fiind întrebat din toate capitolele, să ştie să răspundă la respectiv n_i chestiuni, $(i = 1, 2, \ldots p)$, din fiecare capitol ?*

R. Probabilitatea căutată este dată de:

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{C_{m_i}^{n_i} \cdot C_{M_i - m_i}^{N_i - n_i}}{C_{M_i}^{N_i}}.$$

Problemă. *La un examen profesorul chestionează o serie de p elevi. El are la dispoziţia sa m chestiuni şi pune fiecărui elev câte o singură întrebare, nici una dintre ele nefiind repetată altuia. In câte feluri deosebite poate el interoga seria considerată ? Care este probabilitatea ca între cele p chestiuni ale profesorului, să fie p_1 chestiuni anumite puse într'o poziţie anumită şi într'o ordine dată unele faţă de altele ?* (Cu alte cuvinte, care este probabilitatea ca p_1 elevi anumiţi din grup, să primească anumite chestiuni într'o ordine dată ?).

Răspunsul la prima chestiune este imediat. Profesorul îşi poate pune întrebările în A_m^p feluri. Numărul cazurilor posibile fiind A_m^p, acela al cazurilor favorabile, este egal cu numărul aranjamentelor de m obiecte luate câte p cari conţin p_1 obiecte într'o poziţie şi ordine anumită. Dacă aceste p_1 obiecte sunt fixate, celelalte obiecte din aceste grupări, vor forma $A_{m-p_1}^{p-p_1}$ aranjamente ; avem deci $A_{m-p_1}^{p-p_1}$ cazuri favorabile, aşa în cât probabilitatea căutată va fi egală cu:

$$\frac{A_{m-p_1}^{p-p_1}}{A_m^p}.$$

Problemă. *Care este probabilitatea ca între cele p chestiuni ale profesorului să fie p_1 chestiuni anumite, care să se succeadă înti'o ordine anumită unele faţă de altele ? Care este probabilitatea ca cele p_1 chestiuni să se succeadă într'o ordine oarecare ?*

Pentru a găsi numărul grupărilor din aranjamentele de m obiecte luate câte p, cari conţin p_1 obiecte înti'o anumită ordine de succesiune între ele, este suficient să formăm aranjamentele cu repetiţie de două obiecte, primul fiind luat de p_1-ori iar al doilea de $(p - p_1)$-ori şi apoi să înlocuim primul obiect cu cele p_1 considerate, aşezate în ordinea indicată unele faţă de altele, al doilea obiect fiind înlocuit respectiv în toate modurile posibile cu $p - p_1$ obiecte din cele $m - p_1$ rămase. Obţinem astfel:

$$A_{m-p_1}^{p-p_1} \cdot \frac{p!}{p_1!\,(p-p_1)!}, \text{ grupări.}$$

Deci probabilitatea ca cele p_1 chestiuni să se succeadă într'o ordine dată este:

$$\frac{A_{m-p_1}^{p-p_1} \cdot C_p^{p_1}}{A_m^p}.$$

Probabilitatea ca între cele p chestiuni ale profesorului să figureze p_1, într'o ordine oarecare unele faţă de altele, se obţine din precedenta înmulţind'o cu $p_1!$; probabilitatea căutată este deci egală cu:

$$\frac{A_p^{p_1} \cdot A_{m-p_1}^{p-p_1}}{A_m^p}.$$

Problemă. *Care este probabilitatea ca între chestiunile pe cari le pune profesorul seriei de p elevi, să figureze p_1 chestiuni dintr'un grup de m_1 (din totalul de m chestiuni), acestea fiind puse la p_1 elevi anumiţi şi succedându-se între ele într'o ordine dată?*

Pentru evaluarea numărului cazurilor favorabile, va trebui să căutăm câte din cele A_m^p grupări de obiecte conţin p_1 obiecte din grupul de m_1, aceste p_1 obiecte ocupând anumite poziţii şi având o ordine anumită între ele. Pentru aceasta, să formăm toate combinările de m obiecte luate câte p, cari conţin p_1 obiecte din cele m_1 ; numărul acestor grupări este evident egal cu $C_{m_1}^{p_1} \cdot C_{m-m_1}^{p-p_1}$. Nu ne

rămâne acum decât să permutăm între ele în fiecare grupare şi în toate modurile posibile, cele $p - p_1$ obiecte cari nu aparţin celor m_1, pentru a obţine cele

$$C_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-p_1}^{p-p_1}$$

grupări cari răspund chestiunii. Probabilitatea evenimentului considerat va fi deci:

$$\frac{C_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-p_1}^{p-p_1}}{A_m^p}.$$

Dacă cele p_1 chestiuni se pot succeda într'o ordine oarecare, rezultatul precedent se înmulţeşte cu $p_1!$.[3]

Problemă. *Care este probabilitatea ca între chestiunile puse să figureze p_1 din cele m_1, cu condiţia numai ca acestea să fie puse într'o anumită ordine unele faţă de altele?*

Procedând ca mai sus, se constată că numărul cazurilor favorabile, (egal cu numărul aranjamentelor de m obiecte luate câte p, cari conţin p_1 obiecte, dintr'o categorie de m_1 obiecte, aceste p_1 obiecte fiind într'o ordine anumită unele faţă de altele), este egal cu:

$$C_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-m_1}^{p-p_1} \cdot \frac{p!}{p_1!(p-p_1)!}.$$

Deci probabilitatea căutată are valoarea:

$$\frac{C_p^{p_1} \cdot C_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-m_1}^{p-p_1}}{A_m^p}.$$

Observare. S'ar fi putut obţine numărul grupărilor favorabile şi în felul următor. Formăm combinările de m obiecte luate câte p, cari conţin p_1 obiecte din cele m_1 şi apoi în fiecare grupare înlocuim cele p_1 obiecte cu un acelaş, pe celelalte $p - p_1$ lăsându-le neschimbate. Pe urmă permutăm aceste obiecte între ele în toate modurile posibile, primul fiind luat de p_1-ori, iar celelalte câte o singură dată. Reînlocuind acum în fiecare permutare obiectul repetat de p_1-ori cu cele p_1 din grupul de m_1, în ordinea fixată, obţinem toate grupările favorabile. Numărul lor este deci:

$$C_{m_1}^{p_1} \cdot C_{m-m_1}^{p-p_1} \cdot \frac{p!}{p_1!};$$

el este egal cu cel obţinut mai sus.

In fine, să căutăm numărul aranjamentelor de m obiecte luate câte p, cari conţin p_1 obiecte din cele m_1 în orice poziţie şi ordine. Dacă în grupările precedente, permutăm cele p_1 obiecte între ele în toate modurile posibile, obţinem:

$$A_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-m_1}^{p-p_1} \cdot \frac{p!}{p_1!(p-p_1)!}, \text{ grupări.}$$

Acestea sunt singurile cari răspund chestiunii. De aici se deduce că pro abilitatea ca printre cele p chestiuni (din m) puse seriei, să figureze p_1 chestiuni din cele m_1, este egală cu:

$$\frac{A_{m_1}^{p_1} \cdot A_{m-m_1}^{p-p_1} \cdot C_p^{p_1}}{A_m^p}.$$

In tot ce precede, am presupus că profesorul nu-şi repetă întrebările. Dacă se admite că profesorul repetă întrebarea la care un elev n'a ştiut răspunde şi elevilor cari îi urmează, (ceiace este cazul general), intervin anumite grupări remarcabile dintre aranjamentele cu repetiţie de m obiecte luate câte p, de cari ne vom ocupa într'un articol viitor.

[3]) Acest rezultat permite să se calculeze probabilitatea pe care o au cei p_1 elevi consideraţi de a şti răspunde la chestiunile ce le sunt puse.

NOTE MATEMATICE

22. — *Numere interesante cu cifre diferite.*[1]

Pentru $p = 6$ am găsit următoarele 87 soluţiuni ale ecuaţiunei:

$$N = p \times N_p.$$

$6 \times 21578943 = 129473658$	$6 \times 41957283 = 251743698$
$6 \times 23158794 = 138952764$	$6 \times 41957328 = 251743968$
$6 \times 24598731 = 147592386$	$6 \times 41957823 = 251746938$
$6 \times 24958731 = 149752386$	$6 \times 41958273 = 251749638$
$6 \times 27548913 = 165293478$	$6 \times 42195783 = 253174698$
$6 \times 27891543 = 167349258$	$6 \times 42319578 = 253917468$
$6 \times 27893154 = 167358924$	$6 \times 42719583 = 256317498$
$6 \times 28731549 = 172389564$	$6 \times 42731958 = 256391748$
$6 \times 28943157 = 173658942$	$6 \times 42789153 = 256734918$
$6 \times 29415873 = 176495238$	$6 \times 42819573 = 256917438$
$6 \times 31275489 = 187652934$	$6 \times 42985731 = 257914386$
$6 \times 31542789 = 189256734$	$6 \times 43152789 = 258916734$
$6 \times 31587294 = 189523764$	$6 \times 43195728 = 259174368$
$6 \times 32458971 = 194753826$	$6 \times 43219578 = 259317468$
$6 \times 32548791 = 195287346$	$6 \times 43271958 = 259631748$
$6 \times 32714589 = 196487534$	$6 \times 45719283 = 274315698$
$6 \times 32897541 = 197385246$	$6 \times 45719328 = 274315968$
$6 \times 41527893 = 249167358$	$6 \times 45728193 = 274369158$

[1]) Urmare la notele de la pag. 80, 92 şi 117.

$6 \times 45731928 = 274391568$
$6 \times 45781923 = 274691538$
$6 \times 457?2193 = 274693158$
$6 \times 45819273 = 274915638$
$6 \times 45827193 = 274963158$
$6 \times 47328591 = 283971546$
$6 \times 4753\ 891 = 285107346$
$6 \times 485729?1 = 291437?86$
$6 \times 48579231 = ?91475386$
$6 \times 48591273 = 291547638$
$6 \times 48912753 = 293476518$
$6 \times 49285731 = 295714386$
$6 \times 52487931 = 314927586$
$6 \times 52874931 = 317219586$
$6 \times 52987431 = 317924586$
$6 \times 71528943 = 429173658$
$6 \times 71954283 = 431725698$
$6 \times 71954328 = 43172596?$
$6 \times 72819543 = 437917258$
$6 \times 72854931 = 437129586$
$6 \times 72985431 = 437912586$
$6 \times 73105428 = 439172568$
$6 \times 78195423 = 469172538$
$6 \times 78219543 = 469317258$
$6 \times 78549231 = 471295386$

$6 \times 78942153 = 473652918$
$6 \times 78943152 = 473658912$
$6 \times 79854231 = 479125386$
$9 \times 81954273 = 491725638$
$6 \times 82719543 = 496317258$
$6 \times 85473291 = 512839746$
$6 \times 85491273 = 512947638$
$6 \times 87249531 = 523497186$
$6 \times 87294153 = 523764918$
$6 \times 87315294 = 523891764$
$6 \times 87495231 = 524971386$
$6 \times 87941523 = 527649138$
$6 \times 89145327 = 534871962$
$6 \times 89532714 = 537196284$
$6 \times 89532471 = 537194826$
$6 \times 89745321 = 538471926$
$6 \times 94152873 = 564917238$
$6 \times 94857123 = 569142738$
$6 \times 94857213 = 569143278$
$6 \times 94857312 = 569143872$
$6 \times 95\ 48731 = 571492386$
$6 \times 97328541 = 583971246$
$6 \times 98541273 = 591247638$
$6 \times 98724531 = 592347186$
$6 \times 98745231 = 592471386$

G-L Gh. Buicliu

23. — *Identités renfermant des fonctions trigonométriques des angles d'un triangle établies par des intégrations.*

I:

1. Partons de

$$\cos A - \cos C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \sin \frac{C-A}{2}$$

$$(1) \qquad = 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2} .$$

Comme $A + B + C = \pi$, on a, en considérant B comme constant, $dA + dC = 0$.

Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par $dA = -dC$:

$$\cos A\, dA + \cos C\, dC = 2 \cos \frac{B}{2} \cos\left(A + \frac{B}{2}\right) dA,$$

car

$$C = \pi - A - B,$$

$$\frac{C-A}{2} = \frac{\pi}{2} - A - \frac{B}{2} .$$

Intégrons :

$$(\alpha) \quad \sin A + \sin C = 2 \cos \frac{B}{2} \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + \text{C-te.}$$

Pour déterminer la constante, posons $A = -B$, $C = \pi$;

$$(\alpha') \qquad -\sin B = -2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} + \text{C-te.}$$

Donc :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{B}{2}\left[\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + \sin \frac{B}{2}\right]$$

$$= 2 \cos \frac{B}{2} \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} .$$

ou :

$$\boxed{\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

2. $$\sin A - \sin C = 2 \cos \frac{A+C}{2} \sin \frac{A-C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2} ,$$

$$\frac{A-C}{2} = \left(A + \frac{B}{2}\right) - \frac{\pi}{2} ,$$

$$\sin A\, dA + \sin C\, dC = -2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{A-C}{2} dA$$

$$= -2 \sin \frac{B}{2} \cos\left(A + \frac{B}{2}\right) dA$$

$$(\alpha) \quad -\cos A - \cos C = -2 \sin \frac{B}{2} \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + \text{C-te}$$

Posons $A = \pi - B$, $C = 0$;

$$(\alpha') \qquad -\cos B + 1 = 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} + \text{C-te.}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2 \sin \frac{B}{2}\left[\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) - \sin \frac{B}{2}\right]$$

$$= 2 \sin \frac{B}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} ,$$

ou :

$$\boxed{\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

3. De, $\cos A + \cos C = 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$,

on déduit, d'une façon analogue, en déterminant la constante d'intégration, avec $A = -B$, $C = \pi$,

$$\boxed{\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

4. De $\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$

on déduit, en déterminant la constante d'intégration avec, $A = \pi - B$, $C = 0$

$$\boxed{\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

II.

1. $\cos 2A - \cos 2C = 2 \sin (A + C) \sin (C - A)$

$= 2 \sin B \sin (2A + B)$

$\cos 2A \, d(2A) + \cos 2C \, d(2C) = 2 \sin B \sin (2A + B) \, d(2A)$

$$\begin{cases} (\alpha) & \sin 2A + \sin 2C = -2 \sin B \cos (2A + B) + \text{C-te.} \\ & A = -B, \; C = \pi \\ (\alpha') & -\sin 2B = -2 \sin B \cos B + \text{C-te.} \end{cases}$$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin B \, [\cos B - \cos (2A + B)]$

$= 2 \sin B \cdot 2 \sin (A + B) \sin A$

$$\boxed{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C}$$

2. De, $\sin 2A - \sin 2C = 2 \cos (A + C) \sin (A - C)$, on déduit, d'une façon analogue, en déterminant la constante d'intégration avec $A = \frac{\pi}{2} - B$, $C = \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C}$$

3. De même, de :

$\cos 2A + \cos 2C = 2 \cos (A + C) \cos (A - C)$,

on déduit, en déterminant la constante d'intégration comme pour II, 1.

$$\boxed{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C}$$

4. Enfin, de :

$\sin 2A + \sin 2C = 2 \sin (A + C) \cos (A - C)$,

on déduit, en déterminant la constante d'intégration comme pour II, 2.

$$\boxed{\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C}$$

III.

1. $\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A+C}{4} \sin \frac{C-A}{4}$

$= 2 \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - 2A - B}{4}$,

$\cos \frac{A}{2} \, d\left(\frac{A}{2}\right) + \cos \frac{C}{2} \, d\left(\frac{C}{2}\right) =$

$2 \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - 2A - B}{4} \, d\left(\frac{A}{2}\right)$

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - 2A - B}{4} + \text{C-te.} \\ A = -B, \; C = \pi \\ -\sin \frac{B}{2} + 1 = 2 \sin \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi + B}{4} + \text{C-te.} \end{cases}$$

$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1$

$= 2 \sin \frac{\pi - B}{4} \left[\cos \frac{\pi - 2A - B}{4} - \cos \frac{\pi + B}{4} \right]$

$= 2 \sin \frac{\pi - B}{4} \cdot 2 \sin \frac{\pi - A}{\varphi} \sin \frac{\pi - C}{4}$,

ou :

$$\boxed{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4}}$$

2. $\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{C}{2} = \cdots$ donne :

$$\boxed{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}}$$

(La constante d'intégration est déterminée pour $A = 2\pi - B$, $C = -\pi$.

3. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C}{2} = \cdots$ donne

$$\boxed{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} = -1 + 4 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4}}$$

(La constante d'intégration est déterminée comme pour III, 1.

4. $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{C}{2} = \cdots$ donne

$$\boxed{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}}$$

A. GLODEN

24. — *Asupra unei identități.*

Răsfoind numere vechi ale R. M. T., am găsit (V, p. 84) următoarea identitate:

$$p^{p-2k} - C_p^1 (p-2)^{p-2k} + C_p^2 (p-4)^{p-2k} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n C_p^n (p-2n)^{p-2k} = 0,$$

unde $1 \leq k \leq \frac{p}{2}$, iar n este $\frac{p-1}{2}$ sau $\frac{p}{2} - 1$, după cum p este impar sau par. Această identitate este demonstrată de d-l *V. Alaci* pornind dela o alta, care dă $\sin^p t$ în funcțiune de sinusurile sau cosinusurile multiplilor arcului t.

Voesc să arât că aceasta se poate obține foarte ușor cu ajutorul teoriei diferențelor. In adevăr, diferența de ordinul p a unui polinom $P(x)$, este dată de formula [1])

$$(-1)^p \Delta_h^p P(x) = P(x) - C_p^1 P(x+h) +$$

$$C_p^2 P(x+2h) - \cdots + (-1)^p C_p^p P(x+ph)$$

și se știe că dacă gradul lui $P(x)$ este inferior lui p, această diferență este nulă. Luând atunci:

$$P(x) = x^{p-2k}, \quad h = -2, \quad x = p,$$

vom avea:

$$p^{p-2k} - C_p^1 (p-2)^{p-2k} + C_p^2 (p-4)^{p-2k} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^p C_p^p (p-2p)^{p-2k} = 0$$

și, observând că termenii egal depărtați de extremi sunt egali și de acelaș semn, obținem tocmai identitatea d-lui *V. Alaci*.

M. GHERMANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No 4, Decemvrie 1936. Recreațiuni. Cuvântarea Domnului *Ion Ionescu* la sărbătorirea sa de la 1 Noemvrie 1936. O ediție a compendiului lui *Ch. Wolff*, (urmare și sfârșit), de *Victor Marian*. Asupra curbelor plane, de *C. Ionescu-Bujor*. Premiu „Inginer *Al. Roșu*, raport de *Gh. Th. Gheorghiu*, *Gh. Iliescu*, *Alexandru A. Roșu*. Raport pentru premiul „*H. Capriel*", de *I. Busilă*, *Al Pantazi*, *Ovidiu N. Țino*. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Mathematica*, vol. XII, 1936. Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynome d'une variable réelle, par *Tiberiu Popoviciu*. Effecto que produce un campo magnético en el movimiento estacionario de un planeta en la mecanica Einsteniana, por *Godofredo Garcia*. Das sizygetische Büschel von Kurven 3. Ordnung und die Figur von drei konjugierten Kegelschnitten, von *E. A. Weiss*. Sur la définition de la monogénéité et les fonctions monogénes aréolairement, par *Nicolas Ciorănescu*. Sur une démonstration d'existence des ensembles infiniment universels, par *W. Sierpinski*. Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre, par *Z. Butlewschi*. Sur les fonctions univalentes, par *M. Biernacki*. Ueber Mittelwerte an einkörpern, von *W. Blaschke* und *O. Varga*. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I), par *Tiberiu Popoviciu*. Sur l'intégrale de M. *A. Denjoy*, par *Th. Anghelutză*. Courbes sphériques de M. *G. Tzitzeica*, par *Alexandru V. Niculescu*. On the arithmetic of surds among the ancient Hindus, *A. N. Singh*. Une démonstration d'existence des suites transfinies décroissantes d'ensembles F_σ, par *W. Sierpinski*. Sur une classe d'équations algébriques, par *M. Ghermănescu*. Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de *Riemann* ont des frontières totalement discontinues, par *S. Stoilov*. Sur quelques propriétés algébriques des courbes du faisceau *Darboux-Segre*, par *F. Vycihlo*. Quelques constatations sur le rôle des correspondances et des groupes dans la comparaison de deux collections infinies et sur l'utilité des procédés de couplage en analyse, par *Georges Bouligand*. Sur une famille d'ensembles parfaits, par *W. Sierpinski*. Sur certains invariants attachés aux fonctions analytiques, par *Georges Calugaréano*. Sur les fonctions génératrices des polynomes d'Hermite, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur la transformation asymtotique des courbes gauches, par *Ilie I. Popa*. Recherche analytique des surfaces réglées applicables sur le plan, par *Henri Lebesgue*. Sur „l'indétermination" du facteur général dans la théorie de *Spearman*, par *G. Darmois*. Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de *Darboux* et *Segre*, par *Nicolas Abramescu*. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (II), par *Tiberiu Popoviciu*.

3. *Revista Cercului de studii și a asociației absolvenților școalei superioare P. T. T.*, anul V, N-rile 11 și 12, Noemvrie și Decemvrie 1936. (Litografiat.) In afară de articole de specialitate, are și o pagină matematică.

4. *M. Ghermanescu*. Sur une classe d'équations algébriques. (Extras din „Mathematica", vol. XII, p. 119-122).

5. *D. Russu*. La loi de rotation des corps célestes. (1936.)

[1]) *M. Ghermănescu*, *Curs de Algebră Superioară*, pag. 47.

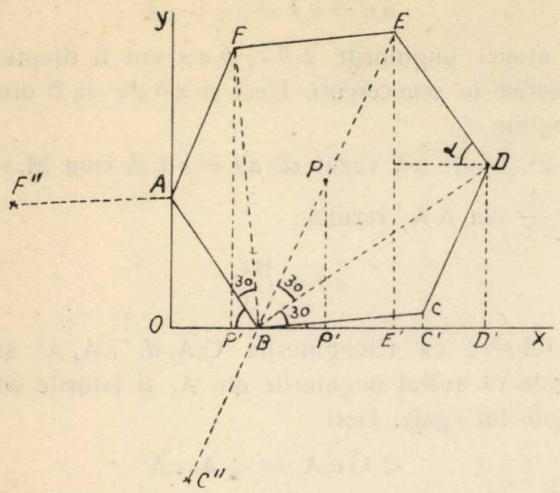
PROBLEME REZOLVATE

248. — *Se dă un segment de lungime constantă l, care se razimă pe două drepte perpendiculare Ox, Oy și face cu Ox unghiul α. Se construește pe AB un exagon regulat. Se cer coordonatele vârfurilor și centrului exagonului*

E. ABASON

Vom rezolva problema pentru cazul când A și B sunt ambele pe semiaxele pozitive, iar exagonul ABCDEF are toate vârfurile în unghiul xOy, ca în figură. Problema se rezolvă la fel pentru

toate celelalte cazuri de figură, numai valorile coordonatelor vor diferi după cazuri.



Trebue observat de la început că pentru o poziție AB, se pot construi 2 exagoane, de-o parte și de alta a lui AB. Considerăm numai unul din aceste exagoane, pe cel cu laturile desenate cu linii pline al cărui centru să fie P.

Fie C', D', E', F', P' proc țiile punctelor C, D, E, F, P pe Ox.

Avem:

$$AB = BC = CD = \cdots = BP = l$$

$$\sphericalangle ABO = \alpha; \qquad \sphericalangle ABC = 120^0$$

$$\sphericalangle CBC' = 180^0 - (\alpha + 120^0) = 60^0 - \alpha$$

$$BD = l\sqrt{3}; \qquad BE = 2l$$

$$\sphericalangle DBD' = 30^0 + \overset{\frown}{CBC'} = 90^0 - \alpha.$$

Cu aceste elemente se pot calcula imediat lungimile, care servesc la calculul coordonatelor cerute.

$$OA = l\sin\alpha; \qquad OB = l\cos\alpha$$

$$BC' = l\cos(60^0 - \alpha); \qquad CC' = l\sin(60^0 - \alpha)$$

$$BD' = l\sqrt{3}\cos(90^0 - \alpha) = l\sqrt{3}\sin\alpha;$$

$$DD' = l\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$BE' = 2l\cos(120^0 - \alpha) = 2l\sin(\alpha - 30^0);$$

$$EE' = 2l\cos(\alpha - 30^0); \qquad BP' = l\sin(\alpha - 30^0)$$

$$F'B = l\sqrt{3}\cos(\alpha + 30^0); \qquad FF' = l\sqrt{3}\sin(\alpha + 30^0).$$

Inlocuim aceste valori în sumele care dau coordonatele și obținem succesiv:

$$OB + BC' = l\cos\alpha + l\cos(60^0 - \alpha) = l\sqrt{3}\sin(60^0 + \alpha)$$

$$OB + BD' = l\cos\alpha + l\sqrt{3}\sin\alpha = 2l\sin(30^0 + \alpha)$$

$$OB + BE' = l\cos\alpha + 2l\sin(\alpha - 30^0) = l\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$OB - F'B = l\cos\alpha - l\sqrt{3}\cos(\alpha + 30^0) = l\sin(\alpha - 30^0)$$

$$OB + BP' = l\cos\alpha + l\sin(\alpha - 30^0) = l\sin(\alpha + 30^0).$$

Așa că în definitiv coordonatele cerute sunt, pentru:

$A: (0,\ l\sin\alpha)$

$B: (l\cos\alpha,\ 0)$

$C: [l\sqrt{3}\sin(60^0 + \alpha),\quad l\sin(60^0 - \alpha)]$

$D: [2l\sin(\alpha + 30^0),\quad l\sqrt{3}\cos\alpha]$

$E: [l\sqrt{3}\sin\alpha,\quad 2l\cos(\alpha - 30^0)]$

$F: [l\sin(\alpha - 30^0),\quad l\sqrt{3}\sin(\alpha + 30^0)]$

$P: [l\sin(30 + \alpha),\quad l\cos(\alpha - 30)]$

Au rezolvat problema pe căi analoage dând soluții exacte, d-nii: *Botea G. N.*, *Botiș E. V*, *Cocorando M.*, *Comănescu-Bălteni Al.*, *Lindenberg L.* *Miclescu Ad.*, *Mihăileanu N. N*, *Nicolaescu P. I.*, *Pătroianu I. M.*, *Petrescu P. Gh.*, *Pincu K.*, *Popescu I.*, *Popovici Th. I.*, *Scripcă L.*, *Simionescu D. Gh.*, *Simionov P. K.*, *Stamatiu M.*, *Stănescu D.*, *Tărăbuță C. P.*, *Țăraș V.*, *Vodrisky Tr.* și *Vătășan G. O.*

D-l *Mihăileanu N. N.* a dat formule generale, în cazul de figură de mai sus, pentru un poligon regulat de n laturi.

916 — *Fie* A', B', C' *extremitățile medianelor triunghiului* ABC, *prelungite respectiv cu o treime din fie-care, iar* F *și* G *extremitățile a două mediane, prelungite în senz invers, cu câte două treimi din fie-care mediană. Intersecțiile laturilor triunghiurilor* ABC, A'B'C' *fiind* a, b, c, d, e, f *să se arate că:*

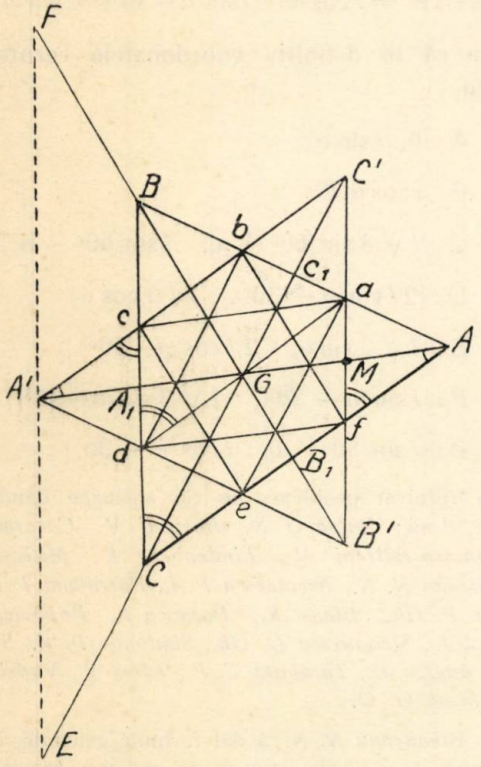
1°. *Dacă două din patrulaterele* $acdf$, $bcef$, $abde$ *sunt dreptunghiuri și al treilea e dreptunghiu.*

2°. *Laturile triunghiurilor* ABC, A', B', C' *se împart reciproc în câte 3 părți egale.*

3°. *Punctele F şi G sunt colineare cu un anumit vârf al triunghiului* A′ B′ C′.

ION MARGINEANU

Soluţia. 1°. Notăm cu A_1, B_1, C_1, G picioarele şi punctul de întâlnire al medianelor. Prin construcţie A_1, C_1 fiind mijloacele lui G A′, G C′ rezultă că $A_1C_1 \parallel A'C'$ şi cum $A_1C_1 \parallel AC$ urmează că $cb \parallel CA$. La fel $af \parallel cd$ şi $de \parallel AB$.



Fie M intersecţia lui af cu mediana AA_1. Se ştie, după o proprietate a medianei, că M este mijlocul segmentului af, paralel cu BC. Triunghiurile AMf, $A'A_1c$ sunt egale căci $MA = A_1A'$ prin construcţie, iar:

$$\sphericalangle MAf = \sphericalangle A_1A'c$$

şi

(1) $$\sphericalangle A_1cA' = \sphericalangle cCA = \sphericalangle MfA$$

ca alterne interne, deci $Mf = cA_1$ şi

$$af = cd.$$

Figura $afdc$ este deci un paralelogram, cu centrul în G. La fel se arată că $bcef$, $abde$ sunt paralelograme.

Dacă $afcd$ şi $bcef$ sunt dreptunghiuri, sunt înscrise în un cerc de diametru:

$$ad = cf = be = cf$$

şi atunci unghiurile bde, bae vor fi drepte ca înscrise în semicercuri. Deci şi $abdc$ va fi dreptunghiu.

2°. La 1° s-a văzut că $af = cd$ şi cum M este la $\frac{1}{3}$ din AA_1 rezultă:

$$af = \frac{BC}{3}.$$

Observ că triunghiurile GA_1d, cA_1A' sunt egale ca având unghiurile din A_1 şi laturile adiacente lui egale. Deci:

$$\sphericalangle GdA_1 = \sphericalangle A_1cA'$$

şi ţinând seamă de (1) rezultă că $dafc$ este paralelogram, deci:

$$af = dc = \frac{BC}{3},$$

de unde rezultă că cB este o treime din BC, ceia ce demonstrează proprietatea.

3°. Prin construcţie, F, A′, E sunt simetricele lui G faţă de B, A_1, C deci F, A', E sunt colineare ca şi B, A_1, C. Mai mult BC şi EF sunt paralele.

S-au primit soluţii analoage de la d-nii: *Bâcicov Boris, Boerescu P. G., Bujoreanu V., Crivăţ I. Vt., Lăţea Const., Lupescu Gh C., Marineanu Tr., Mihăileanu N., Motoc D. M., Popa Gh. I.* şi *Rusu D. C.*

1463. — *Intre unghiurile unui triunghiu avem relaţiile.*

$$1 - 8\cos A\cos B\cos C = \sin^2(B-C) + (\cos A - 2\cos B\cos C)^2$$

$$1 + 8\cos A\sin B\sin C = \sin^2(B-C) + (\cos A + 2\sin B\sin C)^2$$

N. N. MIHAILEANU

Insemnăm cu E_1 şi E_2 membrii al 2-lea ai relaţiilor cerute şi ţinând seamă că:

$$2\cos B\cos C = \cos(B+C) + \cos(B-C) = -\cos A + \cos(B-C)$$

$$2\sin B\sin C = \cos(B-C) - \cos(B+C) = \cos(B-C) + \cos A,$$

putem scrì succesiv:

$$E_1 = \sin^2(B-C) + [2\cos A - \cos(B-C)]^2 =$$
$$1 - 4\cos A[\cos(B-C) - \cos A] =$$
$$1 - 4\cos A[\cos(B-C) + \cos(B+C)] =$$
$$1 - 8\cos A\cos B\cos C.$$

$$E_2 = \sin^2(B-C) + [2\cos A + \cos(B-B)]^2 =$$
$$1 + 4\cos A[\cos(B-C) + \cos A] =$$
$$1 + 4\cos A[\cos(B-C) - \cos(B+C)] =$$
$$1 + 8\cos A\sin B\sin C.$$

Astfel relaţiile cerute există într'un triunghiu.

Soluţii date de d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi), *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Archipescu M. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Baumgartner I. Iosif*, *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Floareş I. Adrian* (lic. Milit Cernăuţi), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gloden A.* (Luxembourg), *Herman A. Victor* (student, Cluj), *Lazăr T. Aurel* (lic. Milit, Cernăuţi), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu Şt.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Pădureţ Vasile* (lic. Chişinău), *Popoviciu I. Gavrilă* (bacalaureat), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş).

1464. — *In sistemul de numeraţie cu baza 4, să se găsească un patrat perfect de patru cifre diferite.*

V. THÉBAULT

Numerile din sistemul cu baza 4, se scriu numai cu cifrele:

0, 1, 2, 3.

Cel mai mic număr de patru cifre în baza 4 este 1023 şi cel mai mare 3210. Aceste numere trecute în baza 10 devin:

$(1023)_4 = 4^3\times 1 + 4^2\times 0 + 4\times 2 + 3 = 75$

$(3210)_4 = 4^3\times 3 + 4^2\times 2 + 4\times 1 + 0 = 228.$

Rădăcinele patrate ale patratelor cuprinse între 75 şi 228 sunt cuprinse între 8 şi 15 inclusiv, deci între 75 şi 228 avem următoarele patrate:

$9^2 = 81 \quad 10^2 = 100, \quad 11^2 = 121, \quad 12^2 = 144,$
$13^2 = 169, \quad 14^2 = 196, \quad 15^2 = 225.$

Trecem acum aceste patrate în baza 4, pentru a vedea care din numerile obţinute, sunt formate cu cifrele 0, 1, 2, 3.

Avem astfel:

$81 = (1101)_4, \quad 100 = (1210)_4, \quad 121 = (1321)_4,$
$144 = (2100)_4, \quad 169 = (2221)_4, \quad 196 = (3010)_4,$
$225 = (3201)_4.$

Dintre aceste numere din baza 4, numai 3201 este format cu cifre diferite cum cere enunţul şi ne dă singura soluţie, având:

$$(3201)_4 = 225 = 15^2 = [(33)_4]^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat), Craiova), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Kornis Ernest* (lic. Diaconovici Loga, Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Ripianu Andrei*, *Tilică C Ştefan*, *Vişa Eugen* (Blaj) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1468. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2(x^2 + 6y^2 + 4xy) + y^2(y^2 + 4xy) = 16 \\ 5 + 4xy = 0 \end{cases}$$

DUMITRU ŢARALUNGA

Observăm că sistemul dat se mai poate scri:

$$\begin{cases} (x+y)^4 = 2^4 \\ 5 + 4xy = 0 \end{cases}$$

sau încă:

$$(1)\quad \begin{cases} x+y = 2\left(\cos\dfrac{k\pi}{2} + i\sin\dfrac{k\pi}{2}\right);\ k=0,1,2,3,\ (i=\sqrt{-1}) \\ xy = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

De aci rezultă uşor că sistemul (1) este echivalent cu următoarele sisteme:

$$(2)\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x+y=2i \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \qquad (5)\begin{cases} x+y=-2i \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Cunoscând suma şi produsul necunoscutelor x, y, ele sunt date de o ecuaţie de gradul al 2-lea uşor de format:

Aceste ecuaţii, pentru sistemele (2), (3), (4) şi (5) sunt respectiv:

$(2')\quad 4t^2 - 8t - 5 = 0, \quad$ deci: $\left(t = \dfrac{5}{2}, \text{ sau } -\dfrac{1}{2}\right)$

$(3')\quad 4t^2 + 8t - 5 = 0, \quad$ „ $\left(t = -\dfrac{5}{2}, \text{ sau } \dfrac{1}{2}\right)$

$(4')\quad 4t^2 - 8it - 5 = 0, \quad$ „ $\left(t = \dfrac{1}{2}(2i \pm 1)\right)$

$(5')\quad 4t^2 + 8it - 5 = 0, \quad$ „ $\left(t = \dfrac{1}{2}(-2i \pm 1)\right)$

Rezultă deci respectiv următoarele sisteme de soluţii a sistemului de ecuaţii dat:

x	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$i+\frac{1}{2}$	$i-\frac{1}{2}$	$-i+\frac{1}{2}$	$-i-\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$i-\frac{1}{2}$	$i+\frac{1}{2}$	$-i-\frac{1}{2}$	$-i+\frac{1}{2}$

Soluţii date de d-ra: *Savin Maria* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Anastasie Petrescu Craioviţa* (Craiova), *Bărbulescu C. Tănase* (Şc. Of. de Artilerie), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic Milit, Craiova), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Ionescu C. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Maşcas Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Olaru Eugen* (Abrud), *Păduret A. Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Popoviciu I. Gavril*, *Rang D.* (Arad), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

PROBLEME PROPUSE

1546. — Să se găsească un cub de patru cifre, a cărui rădăcină cubică să fie egală cu suma primelor trei cifre ale cubului căutat.

M. GHERMANESCU

1547. — Dacă între numerile întregi A, B, C există relaţiunile:

$$A = B \times C$$

$$A + B + C = m \times n,$$

atunci: 1°. B şi C sunt diferiţi de $m.p-1$ şi $m.q-1$.

2°. Dacă unul din numerile B, C se divide prin m, atunci A se divide prin m^2.

G-L GH. BUICLIU

1548. — Fie cercul fix O şi punctul fix C exterior lui. Ducem secanta CBA şi tangenta CD la cercul O. Cercul CBD taie pe AD în E. Să se găsească, când secanta CBA se roteşte în jurul punctului fix C:

1°. Locul punctului E;

2°. Locul punctului M de intersecţie al dreptelor AO şi CE.

O. N. ŢINO

1549. — Să se găsească relaţiunea dintre laturile unui triunghiu ABC, ştiind că dacă V_a, V_b, V_c sunt volumele născute de triunghiu, când se roteşte respectiv în jurul laturilor a, b, c avem relaţia:

$$\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}.$$

ION RIZESCU

1550. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}} - \sqrt{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

L-T. C. D. IONESCU-ŢIU

1551. — Dacă a, b, c sunt respectiv ipotenuza şi catetele unui triunghiu dreptunghiu, să se demonstreze că una din rădăcinele ecuaţiei:

$$2bcx^3 - 2a(b+c+bc)x^2 + a^2(2b+2c+1)x - a^3 = 0,$$

este:

$$x = \frac{a}{a+b+c}$$

V. ALACI

1552. — Să se arate că:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\sqrt{x^2-32}}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\sqrt{x^2-32}}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} = \text{mult. } \pi.$$

Caz particular $x=6$, $x=9$.

N. N. MIHAILEANU

1553. — Un distrugător care merge în aceiaşi direcţie şi pe acelaşi drum cu o navă, lansează o torpilă, care face cu drumul un unghiu α. Torpila merge în acest drum un timp t', schimbă apoi de drum cu 90° şi loveşte ţinta. Să se calculeze timpul t', ştiind că torpila are viteza V, nava are viteza v, iar distanţa iniţială este d. Discuţie.

LT. C. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrunachievici Vladimir (1517, 1518, 1520, 1524, 1527, 1540), *Berinde L. Titus* (1467, 1494, 1510, 1517, 1521, 1529, 1537, 1538, 1540), *Comloşan Cornelia* (1473, 1489, 1513, 1529, 1533, 1537, 1540, 1543), *Cotescu I. C-tin* (1389, 1473, 1512, 1513, 1519, 1521), *Gloden A.* (P., 1506). *Herman Al Victor* (1275, 1334, 1372), *Jidanu C-tin* (1476, 1538), *Popescu Z. N. Alexandru* (1540, 1541, 1544), *Popoviciu Gavril* (P., 1272, 1346, 1455, 1477, 1491), *Ripianu Andreiu* (1529, 1535, 1537, 1539, 1540, 1541, 1543, 1544), *Rosemberg I.* (1484, 1497, 1517, 1519, 1521), *Stamate I. Ionel* (1509, 1529, 1540), *Segal Zigu* (P., 1476, 1496, 1506, 1509, 1512, 1513, 1517, 1520, 1521, 1522, 1524, 1527, 1537, 1540, 1541), *Sternberg H* (1526, 1529), *Thébault V.* (A., P.), *Tilică C. Ştefan* (P., 1467, 1471, 1477, 1480, 1481, 1488, 1491, 1498, 1500, 1501, 1503, 1504, 1516, 1520, 1523, 1524, 1538, 1544), *Vlad I. C. Mihai* (P., 1473, 1489, 1513, 1524, 1529, 1533, 1537, 1540).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care a început în Martie 1936.

Costul *special* a unui abonament fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina, şi sunt abonaţi la ea din ţară de la noi, d-nii: Ing. *I. S. Antoniu;* Prof. *G. G. Constantinescu;* Locot. *F. Ionescu-Ţiu;* Prof. *N. N. Mihăileanu*; Prof. *I. Nemet;* Dr. *P. Sergescu*; Asist. Univ. *T. Vescan* şi Locot-Comandor *Gr. Zapan.*

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration:
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XVI. 15 FEBRUARIE 1937 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. THÉBAULT: SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE.
2. M. GHERMANESCU: O APLICATIUNE GEOMETRICA A MOMENTELOR DE INERTIE.
3. NOTE MATEMATICE: 25, 26.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 114, 553, 1471, 1476, 1480, 1484, 1487, 1494.
6. PROBLEME PROPUSE: 1554-1561.
7. TABLA DE MATERII.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Februarie 1937 mai face dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" şi d-nul *Locot. Savin C. Ion*, licenţiat în matematici fost harnic şi distins corespondent al „R. M T.", str. Sărării 56, Iaşi.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVI — No. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR UNE QUESTION D'ARITHMÉTIQUE

PAR V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

1. **Problème.** *Trouver n nombres entiers et positifs* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *dont la somme égale le produit.*

Quand $n > 2$, il est clair que les nombres cherchés $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ne peuvent être égaux entre eux, car leur égalité donnerait:

$$x_1^n = n \cdot x_1 \quad \text{ou} \quad x_1^{n-1} = n;$$

or, cette équation est impossible en nombres entiers pour $n > 2$.[1]

Soit x_n le plus grand des nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$, écrits, pour fixer les idées, dans l'ordre de grandeur croissante. On aura, par hyphothèse,

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n,$$

puis, en vertu de ce qui précède:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n < n \cdot x_n;$$

d'où il résulte que:

$$(2) \qquad (P) \equiv x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n < n.$$

De cette dernière inégalité, il faut conclure que la valeur de (P) peut être représentée par l'un des nombres entiers:

$$n-1, \quad n-2, \quad n-3, \ldots, \quad n-p, \ldots, \quad 3, \quad 2, \quad 1,$$

tous inférieurs à n.

Pour obtenir toutes les solutions du problème proposé, il suffit de considérer séparément chacune de ces valeurs possibles de (P). Pour le nombre $(n-p)$, par exemple, où $p \leqq (n-1)$, on devra envisager d'abord l'hypothèse où:

[1]) Si $n = 2$, $x_1 = 2 = x_2$.

$x_{n-1} = n - p$, et $x_1 = x_2 = x_4 = \cdots x_{n-2} = 1$;

puis, le cas où, $(n-p)$ étant un nombre *composé*, x_{n-1} a pour valeur un diviseur, ou le produit de plusieurs diviseurs de $(n-p)$. Les autres diviseurs de $(n-p)$ restants, pourront être pris comme valeurs de $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots$.

Première hypothèse. Observons d'abord que l'équation:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} = 1$$

n'admet pour solution, entière et positive, que:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 1.$$

Et cette solution ne peut convenir, parce qu'elle conduit à:

$$(3) \qquad x_n = x_n + n - 1.$$

En outre, si $x_{n-1} = n - 1$, on a:

$$(n-1)\, x_n = x_n + n - 2 + n - 1 = x_n + 2n - 3;$$

d'où il résulte que:

$$x_n = \frac{2n-3}{n-2} = \frac{2(n-2)+1}{n-2} = 2 + \frac{1}{n-2}.$$

Pour que x_n soit entier, il faut et il suffit que l'on ait:

$$n - 2 = 1 \quad \text{ou} \quad n = 3, \quad \text{et} \quad x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3.$$

De même, lorsque:

$$x_{n-1} = n - 2, \quad n - 3, \ldots, \quad n - p,$$

on doit avoir successivement:

$$(4) \qquad x_n = 2 + \frac{2}{n-2}, \quad 2 + \frac{3}{n-4}, \ldots, \quad 2 + \frac{p}{n-p-1};$$

de sorte que:

$$(5) \qquad n - 3 = 1 \text{ ou } 2; \quad n = 4 \text{ ou } 5,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 4; \ldots$$

(6) $n-4=1$ ou 3; $n=5$ ou 7,

$x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=5$; ...

. . . . . .

(7) $n-p-1=1$, α, β, γ, ou p; $n=p+2$,

$\alpha+p+1$, $\beta+p+1$, $\gamma+p+1, \ldots, 2p+1$;

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, étant tous les diviseurs de p autres que 1 et p.

Second hypothèse. Si l'on considère le nombre

$$n-p=1.\alpha, \beta, \gamma \qquad (\alpha>\beta>\gamma),$$

α, β, γ, étant ses diviseurs, autres que 1 et $n-p$, on aura, par exemple:

$$x_{n-1}=\alpha, \quad x_{n-2}=\beta, \quad x_{n-3}=\gamma,$$

les autres nombres $x_{n-4}, \ldots, x_3, x_2, x_1$ étant tous égaux à 1; de sorte que:

$$\alpha\beta\gamma . x_n = n-4+\alpha+\beta+\gamma+x_n,$$

et, enfin:

$$(8) \qquad x_n=\frac{\alpha+\beta+\gamma+n-4}{\alpha\beta\gamma-1}$$

Pour que ce nombre x_n convienne, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\alpha+\beta+\gamma+n-4=\mathrm{M}(\alpha\beta\gamma-1).$$

Exemple. Trouver 168 nombres entiers et positifs dont la somme égale le produit.

Le produit $(\mathrm{P})\equiv x_1 x_2 \ldots x_{167}$ peut prendre chacune des valeurs:

$$167, 166, 165, \ldots, 4, 3, 2.$$

Ainsi, pour:

$$p=138, \quad n-p=168-138=30=1.2.3.5.$$

Dans ce cas, en vertu de (8),

$$x_{168}=\frac{2+3+5+164}{2.3.5-1}=6;$$

les nombres cherchés sont:

$$x_1=x_2=x_3=\cdots x_{164}=1,$$

$$x_{165}=2, \quad x_{166}=3, \quad x_{167}=5, \quad x_{168}=6.$$

Les autres solutions de ce problème s'obtiennent sans difficulté, en tenant compte des différentes remarques précitées.

2. **Application.** *Déterminer les côtés d'un triangle* ABC *sachant qu'ils sont des multiples du rayon du cercle inscrit.*[1])

Soient r le rayon du cercle inscrit; a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB; p le demi-périmètre; x, y, z les rapports des côtés a, b, c au rayon r.

On aura:

$$a=rx, \quad b=ry, \quad c=rz, \quad p=\frac{1}{2}r(x+y+z);$$

d'où:

$$p-a=\frac{1}{2}r(y+z-x)$$

$$p-b=\frac{1}{2}r(z+x-y)$$

$$p-c=\frac{1}{2}r(x+y-z).$$

Mais, d'après une relation connue:

$$r^2=\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c);$$

donc:

$$r^2=\frac{r^2}{4}\cdot\frac{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}{(x+y+z)},$$

équation qui revient à:

$$(9) \quad (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=4(x+y+z).$$

Les côtés a, b, c étant, par hypothèse, des multiples du rayon r, les rapports x, y, z, de ces côtés au rayon, sont nécessairement des nombres entiers, et, par conséquent, les expressions:

$$(10) \quad (y+z-x), \ (x+z-y), \ (x+y-z), \ (x+y+z)$$

représentent aussi des nombres entiers, qui doivent être positifs, parce que les valeurs des différences $p-a$, $p-b$, $p-c$ sont, comme on sait, des quantités positives.

De plus, il est facile de reconnaître que chacun des quatre nombres (10) est exactement divisible par 2.

En effet, l'égalité (9) montre que le produit des trois premiers est un multiple de 4; d'ailleurs en additionnant deux à deux ces trois nombres, on obtient pour sommes $2x, 2y, 2z$; il faut donc que chacun d'eux soit pair. Il en est de même du

[1]) Ce problème est connu.

quatrième $(x+y+z)$, car il est égal à la somme des trois premiers.

Cela établi, posons :

$$(11)\quad y+z-x=2X,\ z+x-y=2Y,\ x+y-z=2Z;$$

il en résulte :

$$x+y+z=2(X+Y+Z),$$

et, par suite l'équation (9) se réduit à :

$$XYZ=X+Y+Z.$$

On voit ainsi que la détermination des rapports x, y, z dépend de la résolution de ce problème : *Trouver trois nombres entiers et positifs dont la somme égale le produit.*

Or, nous avons vu, que la solution de ce problème, est :

$$X=3,\quad Y=2,\quad Z=1.$$

En remplaçant X, Y, Z par 3, 2, 1, les équations (11) deviennent :

$$y+z-x=6,\quad z+x-y=4,\quad x+y-z=2,$$

et en additionnant deux à deux ces dernières, on trouve :

$$x=3,\quad y=4,\quad z=5,$$

d'où :

$$a=3r,\quad b=4r,\quad c=5r.$$

Telles sont les expressions des côtés du triangle ABC, qui visiblement, est *rectangle* en C.

O APLICAȚIUNE GEOMETRICĂ A MOMENTELOR DE INERȚIE

De M. Ghermanescu

De câtăva vreme, d-l *D. Wolkowitsch* publică în *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* proprietăți ale unor configurațiuni geometrice, stabilite cu ajutorul noțiunei mecanice de *moment de inerție.*

Aceasta m'a făcut să-mi reamintesc de o serie de proprietăți ale unei configurațiuni de cuadrice homofocale și o familie de sfere concentrice, pe cari le-am stabilit în „Gazeta Matematică", acum aproape douăzeci de ani[1], pornind dela unele cercetări ale d-lui Profesor *A. Myler.*

[1] *Despre suprafața undelor*, 1920, XXVI, pag. 161.

Voesc să arăt că două din aceste proprietăți se pot ușor stabili făcând apel la noțiunea de moment de inerție. In adevăr, fie un plan P, o dreaptă D, normală planului, iar A intersecția lor. Dacă considerăm un solid redus la un punct M, însemnând respectiv prin I_P, I_D, I_A momentele de inerție ale lui M față de P, D și A, avem relațiunea :

$$(\alpha)\qquad I_P+I_D=I_A,$$

care arată că dacă două din aceste momente sunt constante, rezultă aceiaș proprietate și pentru al treilea.

Pe de altă parte, se știe că locul punctelor pentru cari $I_A=$ const. este o sferă ; că o cuadrică aparținând unei familii homofocale este înfășuratoarea planelor pentru ale căror puncte $I_P=$ const ; că în fine, dreptele pentru cari $I_D=$ const. aparțin *complexului lui Painvin.*

Acestea stabilite, să considerăm o familie de cuadrice homofocale :

$$(1)\qquad \frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}-1=0$$

căreia să-i asociem familia de sfere concentrice :

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2-\lambda=0.$$

Asupra acestei configurațiuni geometrice, eu am stabilit, între altele, (loc. cit.) următoarele două proprietăți preliminarii :

I. *Locul cercurilor de intersecție ale planelor de direcție fixă tangente cuadricilor familiei (1) cu sferele (2), este un cilindru circular drept.*

II. *Locul intersecțiilor podarelor cuadricelor familiei (1), relative la polul* P, *cu sferele concentrice (2), este un con de gradul al doilea cu vârful în* P.

Din aceste proprietăți, voiu deduce imediat altele, introducând momentele de inerție în demonstrațiune.

Să considerăm proprietatea I. Printr'un punct al unei generatoare a cilindrului, loc geometric, trec evident o sferă (2) și un plan tangent la o cuadrică (1). Avem deci, pentru orice punct al al acestei generatoare, $I_A=$ const, $I_P=$ const, deci, după (α), avem și $I_D=$ const, de unde rezultă următoarea proprietate :

a. *Generatoarele cilindrelor circulare drepte, locurile intersecţiilor planelor de direcţie fixă tangente cuadricelor familiei (2) cu sferele concentrice (1), aparţin când direcţia variază, unui complex al lui Painvin.*

Să considerăm proprietatea II. Printr'un punct al generatoarei conului-loc geometric, trec o podară şi o sferă (2). Dar în orice punct al podarei există un plan tangent, tangent şi unei cuadrice a familiei (1), deci avem $I_P = \text{const}$, iar din cauza sferei, $I_A = \text{const}$, urmează, ca mai sus, că pentru orice punct al generatoarei conului-loc geometric avem $I_D = \text{const}$, de unde rezultă următoarea proprietate:

b. *Generatoarele conurilor cu vârful într'un punct* P *şi având ca directoare cuarticele de intersecţie ale sferelor (2) cu podarele punctului* P *în raport cu cuadricele (1), aparţin, când* P *variază, unui complex al lui Painvin.*

Iată dar două remarcabile aplicaţiuni geometrice ale momentelor de inerţie, pe cari le semnalez cu gândul de a provoca altele din partea corespondenţilor noştri.

Proprietăţile a. şi b. l-am stabilit dealtfel prin calcul în articolul citat, făcând uz de coordonatele *plückeriene* ale dreptelor.

NOTE MATEMATICE

25. — *Numere interesante cu cifre diferite.*[1])

Pentru $p = 9$ am găsit următoarele 136 soluţiuni ale ecuaţiunei:

$$N = p \times N_p.$$

$9 \times 15287436 = 137586924$
$9 \times 15328476 = 137956284$
$9 \times 15473862 = 139264758$
$9 \times 15476283 = 139286547$
$9 \times 15873264 = 142859376$
$9 \times 16254873 = 146293857$
$9 \times 16324875 = 146923875$
$9 \times 16583742 = 149253678$
$9 \times 17426583 = 156839247$
$9 \times 17432586 = 156893274$
$9 \times 17583264 = 158249376$
$9 \times 17625483 = 158629347$
$9 \times 18265473 = 164389257$
$9 \times 18326475 = 164938275$
$9 \times 18436527 = 165928743$
$9 \times 21473865 = 193264785$
$9 \times 21476385 = 193287465$
$9 \times 21583764 = 194253876$
$9 \times 21637584 = 194738256$
$9 \times 21748536 = 195736824$
$9 \times 24371865 = 219346785$
$9 \times 24386517 = 219478653$
$9 \times 25763841 = 231874569$
$9 \times 26571843 = 239146587$
$9 \times 26837541 = 241537869$
$9 \times 27536841 = 247831569$
$9 \times 27634851 = 248713659$
$9 \times 28537461 = 256837149$
$9 \times 28715463 = 258439167$
$9 \times 31527684 = 283749156$
$9 \times 32685417 = 294168753$
$9 \times 32687415 = 294186735$
$9 \times 32815764 = 295341876$
$9 \times 32875146 = 295876314$
$9 \times 34721865 = 312496785$
$9 \times 35284761 = 317562849$
$9 \times 35471862 = 319246758$
$9 \times 35742861 = 321685749$
$9 \times 36571842 = 329146578$
$9 \times 38576214 = 347185926$
$9 \times 41576328 = 374186952$
$9 \times 41768352 = 375914268$
$9 \times 41836572 = 376529148$
$9 \times 42183575 = 379652184$
$9 \times 42517683 = 382659147$
$9 \times 42857361 = 385716249$
$9 \times 43275168 = 389476512$
$9 \times 43527618 = 391748562$
$9 \times 43571862 = 392146758$
$9 \times 43618572 = 392567148$
$9 \times 45821763 = 412395867$
$9 \times 45863217 = 412768953$
$9 \times 45972631 = 413753679$
$9 \times 46258731 = 416328579$
$9 \times 46837521 = 421537689$
$9 \times 46853217 = 421678953$
$9 \times 48573621 = 437162589$
$9 \times 51328647 = 461957823$
$9 \times 51376842 = 462391578$
$9 \times 52146873 = 469321857$
$9 \times 52176348 = 469587132$
$9 \times 52436187 = 471925683$
$9 \times 52437618 = 471938562$
$9 \times 53216847 = 478951623$
$9 \times 53246187 = 479215683$
$9 \times 53742168 = 483679512$
$9 \times 53746218 = 483715962$
$9 \times 53746281 = 483716529$
$9 \times 54762813 = 492865317$
$9 \times 57426381 = 516837429$
$9 \times 57624831 = 518623479$
$9 \times 57638214 = 518746926$
$9 \times 58134764 = 523194876$
$9 \times 58237641 = 524138769$
$9 \times 58463721 = 526173489$
$9 \times 58713264 = 528419376$
$9 \times 58721463 = 528493167$
$9 \times 58741326 = 528671934$
$9 \times 62548713 = 562938417$
$9 \times 6275481 = 564781329$
$9 \times 63127548 = 568147932$
$9 \times 63215748 = 568941732$
$9 \times 63241587 = 569174283$
$9 \times 63547182 = 571924638$
$9 \times 64257381 = 578316429$
$9 \times 64325718 = 578931462$
$9 \times 65142748 = 586194732$
$9 \times 65243718 = 587193462$
$9 \times 65273481 = 587461329$
$9 \times 65325714 = 587931426$
$9 \times 65738142 = 591643278$
$9 \times 6574138 = 591672438$
$9 \times 65812743 = 592314687$
$9 \times 68143275 = 613289475$
$9 \times 68321475 = 614893275$
$9 \times 68325417 = 614928753$
$9 \times 71324865 = 641923785$
$9 \times 71354862 = 642193758$
$9 \times 71465328 = 643187952$
$9 \times 72134865 = 649.137?5$
$9 \times 72534861 = 652813749$
$9 \times 72645831 = 653812479$
$9 \times 73125486 = 658129374$
$9 \times 73163548 = 658471932$
$9 \times 73214586 = 658931274$
$9 \times 74621538 = 671593842$
$9 \times 74683215 = 67?.148935$
$9 \times 74823651 = 673412859$
$9 \times 75461382 = 679152938$
$9 \times 75841326 = 682571634$
$9 \times 761 5483 = 685129347$
$9 \times 76152439 = 685371942$
$9 \times 76214583 = 6859?1247$
$9 \times 76348251 = 687134259$
$9 \times 76438125 = 687?43125$
$9 \times 81274365 = 731469285$
$9 \times 82164735 = 739482615$
$9 \times 82436517 = 741?28653$
$9 \times 825 6317 = 742916853$
$9 \times 82647351 = 743826159$
$9 \times 83246518 = 749218653$
$9 \times 83257614 = 749318526$
$8 \times 83521476 = 75169?284$
$9 \times 83521647 = 751694823$
$9 \times 8357426? = 752168349$
$9 \times 84257361 = 758316249$
$9 \times 84365127 = 759286143$
$9 \times 84713265 = 762419385$
$9 \times 85347261 = 768125349$
$9 \times 85436127 = 768925143$
$9 \times 85461372 = 769152348$
$9 \times 85471362 = 769241358$
$9 \times 85473126 = 769258134$
$9 \times 87146325 = 784316925$
$9 \times 87325146 = 785926314$

[1]) Urmarea notelor de la pag. 80, 92, 117 şi 129.

Extensiunea problemei pentru cazul întrebuinţărei celor 10 cifre ale sistemului zecimal, formează obiectul notelor ce au început să se publice în „*Gazeta Matematică*“, vol. XLII, pag. 247.

G-L GH. BUICLIU

26. — *Sur une méthode de formation des égalités multigrades* $a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots$ $(p = 1, 3, 5 \ldots, 2n + 1)$.

Nous allons indiquer une méthode générale pour

former de telles égalités multigrades à partir d'une égalité multigrade connue telle que :

$$a_1'^p + a_2'^p + \cdots = b_1'^p + b_2'^p + \cdots$$
$$(p = 1, 2, 3.., 2n+1, 2n+2).$$

Nous l'expliquerons sur des exemples.

a. Considérons l'égalité multigrade :

$$1^p + 19^p + 28^p + 59^p + 65^p + 90^p + 102^p =$$
$$2^p + 14^p + 39^p + 45^p + 76^p + 85^p + 103^p$$
$$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Désignons par S_1 la somme de tous les termes dans un membre de l'égalité et retranchons de tous les termes

$$\frac{S_1}{n} = \frac{364}{7} = 52 ;$$

il vient :

$$(-51)^p + (-33)^p + (-24)^p + 7^p + 13^p + 38^p + 50^p =$$
$$(-50)^p + (-38)^p + (-13)^p + (-7)^p + 24^p + 33^p + 51^p$$

vraie pour $(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ d'après un théorème général sur les égalités multigrades. On voit de plus que cette relation est vraie pour n'importe quelle valeur paire de p. On en tire :

$$7^p + 13^p + 38^p + 50^p = 24^p + 33^p + 51^p \quad (p = 1, 3, 5).$$

b. De l'égalité sextigrade :

$$3^p + 9^p + 34^p + 40^p + 46^p + 71^p + 77^p + 92^p =$$
$$1^p + 16^p + 22^p + 47^p + 53^p + 59^p + 84^p + 90^p$$

$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, on déduit, par le même procédé, la suivante, vraie pour $(p = 1, 3, 5)$:

$$1^p + 13^p + 25^p + 75^p + 87^p = 49^p + 61^p + 91^p.$$

c. Considérons l'égalité duodécigrade :

(1, 7, 11, 19, 21, 31, 41, 51, 71, 81, 83, 93, 93, 105, 113, 117, 125, 129, 153, 157, 175, 179, 185, 187, 199, 199)^p =

(3, 3, 15, 17, 23, 27, 45, 49, 73, 77, 85, 89, 97, 109, 109, 119, 121, 131, 151, 161, 171, 181, 183, 191, 195, 201)^p

$(p = 1, 2, 3, 4, \ldots, 11, 12)$ avec 26 termes dans chaque membre. Retranchons de chaque terme :

$$\frac{S_1}{n} = \frac{2626}{26} = 101 ;$$

il vient finalement.

(4, 4, 9, 10, 15, 25, 30, 35, 40, 41, 45, 47, 50)^p =
(2, 6, 8, 12, 14, 26, 28, 37, 39, 42, 43, 49, 49)^p
$(p = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$

avec 13 termes par membre. On a par exemple :

$$S_1 = 355, \quad S_3 = 543.601$$
$$S_5 = 1.032.137.305 \text{ etc.}$$

d. Voici une égalité vraie pour $(p = 1, 2, 3, 4, \ldots 13, 14)$

(1, 9, 9, 13, 21, 23, 33, 35, 37, 51, 55, 55, 59, 67, 71, 79, 83, 83, 83, 87, 95, 95, 107, 115, 117, 129, 129, 129, 133, 141, 141, 145, 153, 157, 157, 169, 173, 175, 179, 187, 199, 201, 201, 213, 215, 215)^p =

(3, 3, 15, 17, 17, 19, 31, 39, 43, 45, 49, 61, 61, 65, 73, 77, 77, 85, 89, 89, 89, 101, 103, 111, 123, 123, 131, 135, 135, 135, 139, 147, 151, 159, 163, 163, 167, 181, 183, 185, 195, 197, 205, 209, 209, 217)^p,

avec 46 termes par membre.

$S_1 = 5014$, $\frac{S_1}{n} = 109$. Nous en déduisons :

(1, 7, 7, 11, 13, 13, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 27, 29, 36, 37, 38, 43, 44, 48, 50, 50, 54)^p =

(3, 4, 10, 10, 10, 12, 16, 16, 18, 22, 24, 24, 30, 32, 33, 35, 39, 45, 46, 46, 47, 53, 53)^p
$(p = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)$.

On a par exemple $S_1 = 628$
$S_3 = 942.412$ etc.

Cette égalité multigrade renferme 23 termes par membre.

A. GLODEN
(Luxembourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 5, Ianuarie 1937. Cuvântarea Domnului *Ion Ionescu* la sărbătoria sa dela 1 Noemvrie 1936 (urmare şi sfârşit). Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Eforturi suferite de avion pe timpul resursei, de Maior *I. Linteş*. Note matematice. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate. Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Ştiinţă şi Progres*. Revista ştiinţifică a liceelor militare, an. III, No. 7. Decemvrie 1936. Producerea şi măsurarea temperaturilor înalte, de Prof. *Nicolae Stănescu*

Milcov. Ceva despre climă şi vegetaţie, de Prof. *Ioan Ciobanu.* Noutăţi, de *N. O. Z.* Publicaţii noui, de *N. O. Z.* Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Idem*, an. III, N-rile 8—9, Februarie 1936. O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, de Prof. *V. Alaci.* Trei sute de ani dela naşterea Ştiinţei experimentale, de *I. N. Longinescu.* Puterile militare europene (după criticii militari germani) Forţele micei înţelegeri, de Prof. *George Janet.* Reviste de Stiinţă Românească. (Cu ocazia Jubileului „Naturei"), de *N. O. Zaharia.* Publicaţii noui, de *N. O. Z.* Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Numerus.* Revista de matematici elementare pentru învăţământul secundar, normal, profesional şi militar. Director: *R. N. Racliş.* Vol. 2, Caietul 20, Ianuarie 1937. Are la început un portret al regretatului *Traian Lalescu.* (1882—1929), care între altele o înfiinţat şi Revista Matematică din Timişoara. Conţine apoi: „Probleme propuse la examenele de bacalaureat. La géométrie du triangle, par *Tr. Lalesco*, (suite de la pag. 184).

5. *D. Germani.* Lois de similitude et structure des formules dans l'étude des machines électriques (Extrait des Comptes-Rendus des Séances de L'Académie des Sciences de Roumanie, Tome I)

6. *Constantin Kiriţescu.* Problema „Educaţiei Dirijate", în legătură cu suprapopulaţia universitară şi şomajul intelectual. (Extras din Arhiva pentru Ştiinţa şi Reforma Socială, anul XIII, 1936)

7. *M. Ghermănescu.* Memoriu de titluri şi lucrări, 1937.

8. *M. Ghermănescu* Sur les fonctions *n*-Métaharmonique. (Extrait du „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara, Tome 7, Fasc. 1—2, 1936).

9. *Caius Iacob.* Memoriu de titluri şi lucrări, 1937.

10. *Caius Iacob.* Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen. (Extras din „Revista Matematică" din Timişoara, 1937.)

11 *Caius Iacob.* Etude d'un jet gazeux. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara", Tome 7, Fasc. 1—2, 1937.)

PROBLEME REZOLVATE

114. — *Se consideră semicercul descris pe diametrul* A B *ca fix şi o coardă* A C *mobilă trecând necontenit prin punctul* A. *Să se afle locul geometric al punctului* M, *situat pe coarda* B C *astfel ca*

$$B C \cdot A M = k = \text{constant}.$$

M. VASILIU

Iau ca axe de coordonate pe A B şi perpendiculara în A pe AB. Fie $B(a, 0)$. Dreptele A C şi B C vor avea ecuaţiile:

$$(A C) \qquad y = \lambda x$$

$$(B C) \qquad y = -\frac{1}{\lambda}(x - a).$$

Rezolvind acest sistem se găseşte că C are coordonatele:

$$C\left(\frac{a}{1+\lambda^2}, \frac{a\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

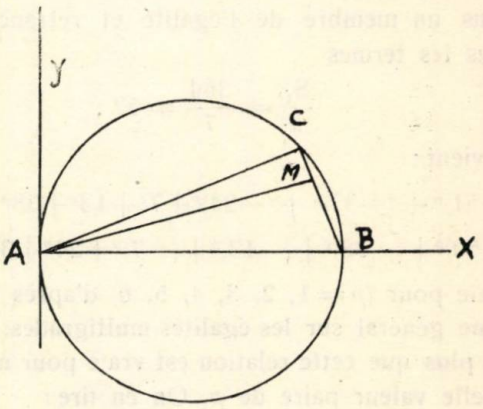
Fie acum $M(x, y)$ un punct pe B C. Vom avea:

$$\overline{B C}^2 = \left(\frac{a}{1+\lambda^2} - a\right)^2 + \left(\frac{a\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 = \frac{a^2\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

$$\overline{A M}^2 = x^2 + y^2.$$

Ţinând seamă de condiţia din enunţ avem:

$$(1) \qquad \overline{B C}^2 \cdot \overline{A M}^2 = \frac{(x^2+y^2)^2 a^2 \lambda^2}{1+\lambda^2} = k^2$$



şi locul cerut se află eliminând pe λ între (B C) şi (1). Rezultatul eliminării este:

$$a^2(x^2+y^2)(x-a)^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2],$$

care este ecuaţia locului. Se vede că locul este o curbă de gradul IV, o cuartică simetrică faţă de A B.

Notă. Dacă s-ar cere ca M să fie situat pe A C, atunci locul lui M se obţine eliminând pe λ între ecuaţia (A C) şi ecuaţia (1). Se găseşte cuartica:

$$(x^2+y^2)y^2 = b^2,$$

unde:

$$b^2 = \frac{k^2}{a^2}.$$

D-l *Tărăbuţă C.* a rezolvat bine problema luând origina în mijlocul lui A B.

Celelalte soluţiuni primite nu sunt de menţionat.

558. — *Să se arate că ortocentrul unui triunghiu se bucură de următoarele proprietăţi:*

1°. *Paralele duse prin el la bisectoare, întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte ce sunt picioarele a trei ceviene concurente.*

2°. *Perpendicularele duse prin el la bisectorae*

întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte colineare.

3°. *Antiparalelele duse prin el la laturile triunghiului, întâlnesc laturile triunghiului în trei puncte colineare.*

N. Gh. Botea

Fie H, A′, B′, C′ ortocentrul și picioarele înălțimelor triunghiului ABC înscris în cercul O. Bisectoarea unghiului A taie pe BB′, CC′ în β, α, iar BC este întâlnit în A_1, A_2, A_3 de paralela și perpendiculara din H la acea bisectoară și antiparalela din H la BC.

1°. și 2°. Triunghiurile dreptunghice $\beta AB'$, $\alpha AC'$ având unghiurile din A egale dau

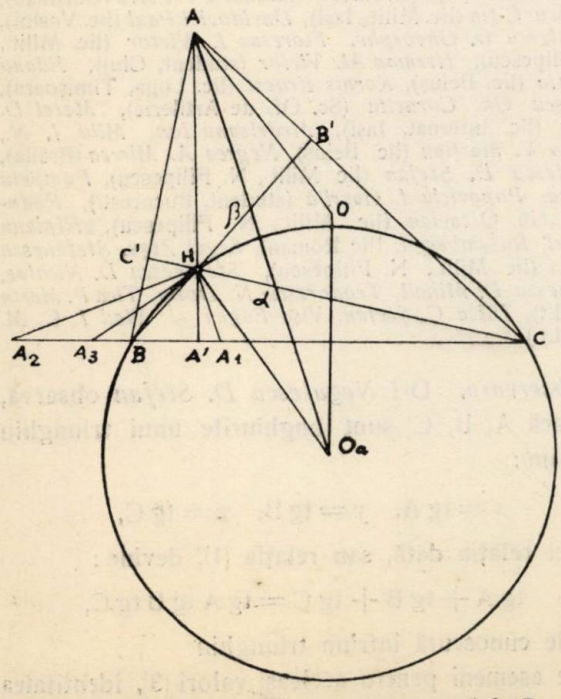
$$\sphericalangle A\alpha C' = \sphericalangle B\beta\alpha,$$

dar:

$$\sphericalangle A_1HC = \sphericalangle A\alpha C', \qquad \sphericalangle A_1HB = \sphericalangle B\beta\alpha$$

ca alterne interne. Rezultă, prin comparație cu egalitățile precedente că HA_1 este bisectoarea unghiului BHC și la fel HA_2 bisectoarea unghiului BHC′. Avem prin urmare în virtutea unei proprietăți cunoscute a bisectoarelor unui triunghiu:

$$(1)\quad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{HB}{HC} \qquad \text{și} \qquad (2)\quad \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{HB}{HC}.$$



Scriind relațiile analoage pentru punctele B_i, C_i ținând seamă de semnele segmentelor și înmulțind se găsește:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B} = -1,$$

care arată că dreptele considerate la 1°. și 2°. sunt concurente.

3°. Fie O_a cercul circumscris triunghiului BHC. Se știe că OA este perpendiculară pe B′C′, care este antiparalelă la BC. Deci $OA \perp HA_3$. Dar figura $OAHO_a$ este paralelogram, deci HA_3 este perpendiculară în H pe O_aH și prin urmare tangentă în H la cercul O_a.

Din asemănarea triunghiurilor A_3HB, A_3HC se deduce:

$$\frac{A_3B}{A_3C} = \frac{\overline{HB}^2}{\overline{HC}^2}.$$

La fel:

$$\frac{B_3C}{B_3A} = \frac{\overline{HC}^2}{\overline{HA}^2}; \qquad \frac{C_3A}{C_3B} = \frac{\overline{HA}^2}{\overline{HB}^2}$$

și prin înmulțire:

$$\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{B_3C}{B_3A}\cdot\frac{C_3A}{C_3B} = +1,$$

care arată ca A_3, B_3, C_3 sunt colineare.

Au rezolvat problema pe această cale d-nii: *C. Coșniță; C. Ionescu-Bujor* și *N. N. Mihăileanu.*

D-l *Stelian D. Popescu* (București) a întrebuințat coordonatele trilineare

D-nii *T. N. Panaite, Cr. I. Râmniceanu* și *I. C. Savin* observă că problema este un caz particular al notei *„Teoreme remarcabile din geometria triunghiului"* publicată de d-l *M. Grünbaum* în „R. M. T.", vol. VI, pag. 52, unde bisectoarele sunt înlocuite prin 3 ceviene oare care.

D-l *C. Coșniță* dă o generalizare punctului 3° înlocuind triunghiul ortic A′B′C′ și ortocentrul H prin triunghiul pedal al unui punct oare-care P.

D-l *Gh. Gh. Vasiliu* observă că problema este un caz particular al unor proprietăți publicate în *Curierul Matematic*, Vol. I, pag 83 și 152 și Vol. II, pag. 155 și 195.

1471. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{tg}(x-30^0) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+30^0) = 0$$

Lt. C. V. Costachescu

Dezvoltând primul și ultimul termen, avem:

$$(1)\quad \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 30^0}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^0} + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 30^0}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 30^0} = 0.$$

Cum $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ecuaţia (1) devine:

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} = 0.$$

Aducând la acelaşi numitor, obţinem:

$$(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x) + (\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x) = 0.$$

Efectuând calculele, găsim:

$$\operatorname{tg}^3 x - 11 \operatorname{tg} x = 0,$$

sau:

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 11) = 0.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele:

(2) $\operatorname{tg} x = 0$, deci: $x = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(3) $\operatorname{tg}^2 x = 11$.

Pentru a rezolva ecuaţia (3), aplicăm logaritmii şi avem:

$$2 \log \operatorname{tg} x = \log 11 = 1{,}04139,$$

deci:

$$\log \operatorname{tg} x = 0{,}520695.$$

Trecând de la logaritmi la arce, găsim:

$$x = 73^0, 13', 17'' \pm k\pi, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots$$

Soluţii date de d-rele: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (bacalaureat, Chişinău), *Babeţiu Corneliu* (lic Loga, Timişoara), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic Milit., Craiova), *Cotescu C.* (lic. Milit., Iaşi), *Davidovici Paul* (lic. Cogâlniceanu, Vaslui), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman A. Victor* (student, Cluj), *Jidanu I. C-tin*, *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medelennu Ion*, *Milu I. N.* (bacalaureat), *Moişovici Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian*, *Negrea Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Olaru Eugen*, *Pădureţ A. Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Pompeiu Marica*, *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Rada Dimitrie* (lic Arad), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.*, *Stamate Ion*, *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică Ştefan*, *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1476. — *Dacă:*

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1,$$

să se arate că avem identitatea:

$$xy + yz + zx = 1 + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

N. N. MIHAILEANU

Observăm că relaţia dată şi identitatea cerută se pot scri încă şi astfel:

(1) $$x + y + z = xyz$$

(2) $$(xy + yz + zx - 1)^2 = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2).$$

Pentru a stabili identitatea (2), pornim de la al 2-lea membru pe care să'l însemnăm cu E şi ţinând seamă de relaţia (1), vedem că putem scri succesiv:

$$E = 1 + \Sigma x^2 + \Sigma x^2 y^2 + x^2 y^2 z^2 =$$
$$1 + (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) +$$
$$(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) + x^2 y^2 z^2 =$$
$$1 + x^2 y^2 z^2 - 2(xy + yz + zx) +$$
$$(xy + yz + zx)^2 - 2x^2 y^2 z^2 + x^2 y^2 z^2 =$$
$$(xy + yz + zx)^2 - 2(xy + yz + zx) + 1 =$$
$$(xy + yz + zx - 1)^2.$$

Astfel identitatea cerută este aratată.

Soluţii date de d-rele: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (bacalaureat, Chişinău), *Anastasie Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cotescu C-tin* (lic. Milit. Iaşi), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Deciulescu D. Gheorghe*, *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medeleanu Ion*, *Milu I. N.*, *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Pompeiu Marica*, *Popoviciu I. Gavrilă* (student, Bucureşti), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Segal Zigu*, *Ştefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae*, *Stoenescu D. Mihail*, *Teodorescu N. Dorin*, *Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Tilică C. Ştefan*, *Vişa Eugen* şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt.)

Observare. D-l *Negulescu D. Stefan* observă, că dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu şi luăm:

(3) $$x = \operatorname{tg} A, \quad y = \operatorname{tg} B, \quad z = \operatorname{tg} C,$$

atunci relaţia dată, sau relaţia (1), devine:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

relaţie cunoscută într'un triunghiu.

De asemeni pentru aceleaşi valori (3), identitatea cerută în enunţ, devine:

$$\Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1 + \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 A)(1+\operatorname{tg}^2 B)(1+\operatorname{tg}^2 C)}$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}.$$

Putem deci formula următorul enunț: *Dacă* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu, atunci avem identitatea*:

$$\Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1 + \sec A \sec B \sec C.$$

1480. — *In orice triunghiu există relația:*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A+B-2C}{3} =$$

$$\frac{2 + \sin \frac{A+B-3C}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{A+B+5C}{2}}{2 - \sin \frac{A+B+5C}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{A+B-3C}{2}}$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Fiindcă $A+B+C = 180^0$, observăm că putem scri succesiv:

$$\sin \frac{A+B-2C}{3} = \sin(60^0 - C) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos C - \sin C)$$

$$\cos \frac{A+B-2C}{3} = \cos(60^0 - C) = \frac{1}{2}(\cos C + \sqrt{3}\sin C)$$

De aci rezultă pentru primul membru al relației cerute:

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A+B-2C}{3} = \frac{3\cos^2 C + \sin^2 C - \sqrt{3}\sin 2C}{\cos^2 C + 3\sin^2 C + \sqrt{3}\sin 2C}$$

$$= \frac{2 + \cos 2C - \sqrt{3}\sin 2C}{2 - \cos 2C + \sqrt{3}\sin 2C}.$$

Să calculăm și membrul al 2-lea.

Pentru aceasta observăm că putem scri succesiv:

$$\sin \frac{A+B-3C}{2} = \sin(90^0 - 2C) = \cos 2C$$

$$\cos \frac{A+B-3C}{2} = \cos(90^0 - 2C) = \sin 2C$$

$$\sin \frac{A+B+5C}{2} = \sin(90^0 + 2C) = \cos 2C$$

$$\cos \frac{A+B-5C}{2} = \cos(90^0 + 2C) = -\sin 2C$$

De aci rezultă pentru al 2-lea membru al identității cerute:

$$(2) \quad \frac{2 + \sin \frac{A+B-3C}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{A+B+5C}{2}}{2 - \sin \frac{A+B+5C}{2} + \sqrt{3}\cos \frac{A+B-3C}{2}}$$

$$= \frac{2 + \cos 2C - \sqrt{3}\sin 2C}{2 - \cos 2C + \sqrt{3}\sin 2C}.$$

Ultimii membrii din relațiile (1) și (2) fiind egali, rezultă că și primii membrii sunt egali și astfel în orice triunghiu există relația din enunț.

Soluții date de d-rele: *Comloșan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Maria* (lic. Oltea-Doamnă, Iași) și de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat), Craiova), *Anastasie Petrescu-Craiovița* (Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie) *Murgu V. Marțian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Mircea* (lic. Milit, N. Filipescu), *Pompeiu Marica*, *Ripianu Andrei*, *Tilică C. Ștefan* și *Vlad C. M.* (Sub-Lt).

1484. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} (x+y)(x^3+y^3) - (x+y)^2 xy = a \\ x^4 + y^4 = b \end{cases}$$

S-LT. IOAN C. SAVIN

Prima ecuație se mai poate scri:

$$(x+y)^2(x^2 - xy + y^2 - xy) = a$$

sau:

$$(1) \quad (x+y)^2(x-y)^2 = (x^2 - y^2)^2 = a.$$

Astfel sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$(2) \quad \begin{cases} x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a \\ x^4 + y^4 = b \end{cases}$$

Scăzând prima ecuație din (2) din a 2-a, avem:

$$2x^2y^2 = b - a.$$

Adunăm această relație cu a 2-a relație a sistemului (2) și apoi extragem rădăcina patrată, obținem:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = \pm\sqrt{2b - a}.$$

Pe de altă parte din (1) scoatem:

$$(4) \quad x^2 - y^2 = \pm\sqrt{a}.$$

Din adunarea și scăderea relațiilor (3) și (4), deducem:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\pm\sqrt{2b-a} \pm \sqrt{a}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\pm\sqrt{2b-a} \mp \sqrt{a}}{2} \end{cases}$$

Sistemele de soluţii ale sistemului dat sunt astfel:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{2b-a} \pm \sqrt{a}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{2b-a} \mp \sqrt{a}}{2}} \end{cases}$$

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Anastasie Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Andrunachievici Vl. Alexandru* (bacalaureat, Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu Vasile* (lic. Milit., Tg Mureş), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Jidanu I C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest, Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of de Artilerie), *Matei D D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Mur u V. Marţian, Negulescu D. Ştelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Pasere Emil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Pădureţ A. Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Pompeiu Marica, Rada Dimitrie* (lic. Arad), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andreiu, Rosemberg I., Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Tilică C. Ştefan, Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1487. — *Intre unghiurile unui triunghiu, avem relaţiile:*

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = 1 + \sec A \sec B \sec C$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) = 1 + \operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$$

$$(\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C)(\operatorname{cotg} 2A + \operatorname{cotg} 2B + \operatorname{cotg} 2C) = -1 - \sec 2A \sec 2B \sec 2C.$$

N. N. MIHAILEANU

Intr'un triunghiu oarecare sunt cunoscute relaţiile:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cocec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$$

(*„Culegere de Probleme"* Trigonometria, pag. 380 şi 394.)

Inmulţind aceste relaţii, avem succesiv:

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = 1 + \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} \cdot \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} = 1 + \sec A \sec B \sec C.$$

Astfel prima relaţie este stabilită.

Pentru a stabili a 2-a relaţie, considerăm triunghiul $A_1 B_1 C_1$, având unghiurile:

$$(2)\quad A_1 = 90^0 - \frac{A}{2},\quad B_1 = 90^0 - \frac{B}{2},\quad C_1 = 90^0 - \frac{C}{2},$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu ABC, ceeace se poate, căci avem:

$$A_1 + B_1 + C_1 = 270^0 - \frac{A+B+C}{2} = 180^0.$$

Aplicând relaţia stabilită (1) triunghiului $A_1 B_1 C_1$ şi ţinând seamă de relaţiile (2), avem:

$$\left[\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)\right] \times \left[\operatorname{cotg}\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(90^0 - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)\right] = 1 + \sec\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)\sec\left(90^0 - \frac{B}{2}\right)\sec\left(90^0 - \frac{C}{2}\right),$$

sau uşor putem scri încă:

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 1 + \operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}.$$

A 2-a relaţie din enunţ este astfel stabilită.

Să stabilim acum a 3-a relaţie cerută. Pentru aceasta considerăm triunghiul $A_2 B_2 C_2$, având unghiurile:

$$(3)\quad A_2 = 180^0 - 2A,\qquad B_2 = 180^0 - 2B,\qquad C_2 = 180^0 - 2C,$$

A B C fiind unghiurile unui triunghiu A B C, ceeace se poate, căci avem:

$$A_2 + B_2 + C_2 = 540^0 - 2(A + B + C) = 180^0.$$

Aplicăm relaţia stabilită (1) triunghiului $A_2 B_2 C_2$, ţinând seamă de expresiile unghiurilor A_2, B_2, C_2 din (3), avem:

$$[\operatorname{tg}(180^0 - 2A) + \operatorname{tg}(180^0 - 2B) + \operatorname{tg}(180^0 - 2C)] \times [\operatorname{cotg}(180^0 - 2A) + \operatorname{cotg}(180^0 - 2B) + \operatorname{cotg}(180^0 - 2C)] = -1 - \sec(180^0 - 2A)\sec(180^0 - 2B)\sec(180^0 - 2C),$$

sau se vede că mai putem scri:

$$(\operatorname{tg} 2A+\operatorname{tg} 2B+\operatorname{tg} 2C)(\operatorname{cotg} 2A+\operatorname{cotg} 2B+\operatorname{cotg} 2C)$$
$$=1-\sec 2A \sec 2B \sec 2C.$$

Astfel şi relaţia 3-a din enunţ este stabilită.

Soluţii obţinute prin mai multe calcule, date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Anastasie Petrescu-Craioviţa* (Craiova), *Andrunachievici Vl Alexandru* (bacalaureat, Chişinău), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Florescu Victor, Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Matei D. Dumitru* (lic. Internat, Iaşi), *Murgu V. Marţian, Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Pădureţ A. Vasile* (lic. Chişinău), *Pompeiu Marica, Ripianu Andreiu, Stefănescu Costin* (lic Milit., N. Filipescu), *Sternberg H.* (lic. Cernăuţi), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Vlad M. C. I.* (Sub-Lt).

1494. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sin 5\alpha-\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin\alpha=\frac{\sin 6\alpha}{1+2\cos\alpha}$$

V. ALACI

Prima soluţie. Notând primul membru cu E, putem scri succesiv:

$$E=(\sin 5\alpha-\sin\alpha)-(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha)=$$
$$2\sin 2\alpha\cos 3\alpha-2\sin\alpha\cos 3\alpha=$$
$$2\cos 3\alpha(\sin 2\alpha-\sin\alpha)=2\cos 3\alpha\sin\alpha(2\cos\alpha-1)=$$
$$\frac{2\cos 3\alpha\sin\alpha(2\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)}{2\cos\alpha+1}=$$
$$\frac{2\cos 3\alpha\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)}{1+2\cos\alpha}.$$

Cum este însă cunoscut, că:

$$\sin\alpha(4\cos^2-1)=\sin 3\alpha,$$

expresiunea E se mai poate scri:

$$E=\frac{2\cos 3\alpha\sin 3\alpha}{1+2\cos\alpha}=\frac{\sin 6\alpha}{1+2\cos\alpha}.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bal Lascu* (student), *Berinde Titus, Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Kornis Ernest* (lic. C-tin Loga, Timişoara), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Medeleanu Ion, Murgu V. Marţian, Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N Filipescu), *Negulescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Pompeiu Marica, Popescu Zorica N. Al.* (Bucureşti), *Ripianu Andrei* (lic. Braşov), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică Ştefan, Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş), *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

Soluţia 2-a. D-l Amărăşteanu F. Marcel bazat pe o notă a autorului, a dat şi următoarea soluţie. In adevăr, dacă în identitatea algebrică:

$$\frac{x^{12}-1}{x^2+x+1}=x^{10}-x^9+x^7-x^6+x^4-x^3+x-1,$$

care ce mai poate scri:

$$\frac{x^6-x^{-6}}{x+x^{-1}+1}=(x^5-x^{-5})-(x^4-x^{-4})+(x^2-x^{-2})-(x-x^{-1}),$$

facem substituţia:

$$x=e^{i\alpha}, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

avem:

$$(1)\qquad \frac{e^{6i\alpha}-e^{-6i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}+1}=(e^{5i\alpha}-e^{-5i\alpha})-$$
$$(e^{4i\alpha}-e^{4-i\alpha})+(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha})-(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}).$$

Cum în virtutea formulelor lui *Euler,* avem:

$$e^{ki\alpha}-e^{-ki\alpha}=2i\sin k\alpha, \qquad e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=2\cos\alpha,$$

relaţia (1) devine după ce simplificăm prin $2i$ ambii membrii:

$$\frac{\sin 6\alpha}{1+2\cos\alpha}=\sin 5\alpha-\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin\alpha,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Observare. Prin această metodă a găsit autorul identitatea propusă, care este şi o metodă de investigaţie pentru stabilirea şi altor identităţi analoage.

PROBLEME PROPUSE

1554. — Să se determine un patrat de cinci cifre de forma $aabbc$.

A. GLODEN

1555. — Să se găsească un bipatrat de patru sau cinci cifre, a cărui rădăcină să fie egală cu suma cifrelor acelui bipatrat.

M. GHERMANESCU

1556. — Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sqrt{b(a-x)}-\sqrt{a(b-x)}}{\sqrt{b(a-x)}+\sqrt{a(b-x)}} =$$

$$\frac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})\,[\sqrt{ab}-x-\sqrt{(a-x)(b-x)}]}{(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})\,[\sqrt{ab}-x+\sqrt{(a-x)(b-x)}]}$$

V. VALCOVICI

1557. — Trei loterii de stat au fiecare câte N numere din care n câștigătoare. Prețul de cumpărarea biletor și valoarea câștigurilor este la fel la fiecare din cele trei loterii. Astfel:

1°. La prima loterie se pun în urnă toate numerile de la 1 la N și în o altă urnă se pun n bilete pe care se scriu diferitele câștiguri și $N-n$ bilete albe. Se trage un bilet din urna cu numere și un bilet din cealaltă urnă. Ce scrie pe acest bilet din urmă este câștigul atribuit biletului din prima urnă.

2°. La loteria a doua, în urna câștigurilor sunt puse numai cele n bilete câștigătoare.

3°. La loteria a treia se întrebuințează actualul sistem al loteriei de stat română, adică pe o roată cu tambure se formează prin învârtire diferite numere, ceiace înlocuește prima urnă a numerilor de la 1 la N.

La care din cele trei loterii ar fi mai avantajos de jucat?

G. L. GH. BUICLIU

1558. — Notând cu y' derivata funcțiunei:

$$y = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)$$

$$- \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}},$$

se cere să se rezolve ecuația:

$$y' = 1.$$

V. ALACI

1559. — Pe cercul circumscris triunghiului A B C fie M și N două puncte; M N taie pe B C în P; paralelele din P la M B, M C, taie laturile A B, A C, în B′ și C′. Punctele A, B′, P, C′, N sunt pe un cerc.

N. N. MIHAILEANU

1560. — Se dă un cerc O de rază R și un punct A fix pe el. Să considerăm un punc B mobil pe cercul O. Se cere locul centrului cercului înscris triunghiului mixtiliniu A O B.

ION C. SCHILERU

1561. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare există relația:

$$\cos B = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} + \sin B \frac{\cos B - \cos C}{\sin B - \sin C}.$$

Aplicații: 1°. A = 0, 2°. B = C, 3°. A = B = C.

LOCOT. C. D. IONESCU-ȚIU

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anastasiu Mihail (1537); *Andrievici N* (1537, 1540); *Anton C. George* (1477, 1520, 1537, 1542, 1549; *Apostol V. Radu* (1540, 1549, 1552), *Babețiu Corneliu* (1537, 1540); *Buznea D. Dinu* (1537); *Cazanacli V. Petre* (1513, 1516, 1517, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1528); *Cernat Camil* (1470, 1521); *Critia Livia* (1540, 1549); *Czirjac Vasile* (1467), *Deciulescu D. Gheorghe* (1405, 1470, 1537, 1540); *Diaconescu Marcel* (1521, 1537, 1540); *Ellenbogen N.* (1549, 1552); *Florescu Victor* (1299, 1458, 1462, 1469, 1473, 1483, 1489, 1493, 1497, 1503, 1509 1513, 1516, 1519, 1521, 1525, 1526, 1527); *Guțulescu N. Aurelian* (1537); *Jidanu I. C-tin* (1538), *Kornis Ernest* (P., 1475 1506, 1537, 1540, 1542, 1544); *Lăzărescu Stelian* (1503, 1540); *Leibovici Serge* (1550); *Lupescu Corneliu* (P., 1513, 1517, 1518. 1520, 1521, 1524, 1529); *Medeleanu Ion* (1467, 1469, 1473, 1510, 1513, 1517, 1520, 1521, 1529, 1537, 1538, 1540); *Murgu V. Marțian* (P., 1488, 1495); *Negrea A. Leonte Mircea* (1523, 1537, 1540, 1541, 1544, 1546, 1548, 1549, 1551, 1552); *Nicolescu I. Mihai* (1526); *Petre C. I.* (1521); *Petrescu C. Benone* (1470, 1475, 1513, 1516, 1521); *Pompeiu Marica* (P., 1465, 1470, 1473, 1488, 1491, 1521, 1551); *Popescu Zorica Alexandru* (P., 1465, 1470); *Postelnicescu M. C.* (P., 1294); *Rohr I. Alexandru* (1537, 1538, 1540, 1541, 1542); *Rosemberg I.* (1493, 1503, 1529, 1550); *Rusu Liviu* (1550, 1551); *Sava I. Victor* (518, 1540, 1550), *Segal Zigu* (P., 1503 1549); *Staicu I. Nicolaie* (1521, 1537); *Stamate I. Ionel* (1465, 1470); *Stefănescu Costin* (P., 1512, 1529, 1540, 1549, 1550, 1551); *Stefănescu D. Nicolae* (1475, 1503, 1540, 1549, 1552); *Stoenescu D. Mirel* (1517); *Tatomir M. G.* (1540, 1549); *Teodorescu N. Dorin* (1280, 1470, 1503, 1512, 1519, 1537, 1540); *Thébault V.* (N., P.); *Tica P. Marin-Gall* (P., 1426, 1537, 1540, 1541); *Tilica C. Ștefan* (1465, 1470, 1473, 1489, 1512, 1513, 1517, 1518, 1519, 1521, 1533, 1537, 1540, 1546); *Vlad I. C. Mihai* 1472, 1477, 1543, 1546); *Zugaican Ilie* (1516, 1520, 1521, 1522, 1525, 1537, 1540, 1544, 1546, 1549, 1550, 1552); *Zamfirescu G. I* (P.)

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor.

		Pag.
V. Thébault	Sur des produits de nombres entiers consécutifs . . .	29
G. G. Constantinescu	Asupra unor probleme de Aritmetică	41
Gh. Constantinescu	O problemă de Teoria numerilor	67
V. Thébault	Sur une question d'arithmétique	137

b) Algebra.

Gh. Constantinescu	Soluţiuni întregi ale ecuaţiunii: $x^2 - a y^2 = b$	4, 17
Gh. Constantinescu	Soluţiuni întregi ale ecuaţiunei: $x^2 + y^2 = a\,10^n$.	101, 113
V. Thébault	Sur l'équation double: (1) $X^2 + X + 1 = \alpha x^2$ (2) $X^2 - X + 1 = \beta y^2$ . .	125
C. Iacob	Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen	126

c) Geometrie.

Cezar Ivănescu	Asupra unui triunghiu . . .	42
V. Thébault	Sur des triangles spéciaux .	65
N. N. Mihăileanu	Câteva proprietăţi corelative relativ la cercurile exînscrise	77
M. Ghermănescu	O aplicaţiune geometrică a momentelor de inerţie . .	140

d) Mecanică.

Caius Iacob	Generalizarea unei teoreme a lui *Fouret*	53
V. Alaci	Relaţiuni între elementele unui poligon convex, precum şi o identitate *Lagrange*, stabilite vectorial	89

e) Diverse.

V. Alaci şi C. Teodorescu	Aniversarea a 15 ani ai Revistei Matematice din Timişoara	3

II. REDACŢIONALE.

* * *	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara	1

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor.

1.[1]) **V. Thèbault**	Sur les carrés symétriques de quatre chiffres	8
2. V. Thébault	Trouver des nombres entiers N formés de n chiffres, dont quelques-uns des premiers chiffres peuvent, au besoin, être des zéros de manièrs que le nombre: $N(10^n - 1)$ soit un carré perfait	22
3. Ad. Popescu	Asupra descompunerii unor patrate	23
6. V. Thébault	Sur des carrés curieux . . .	43
7. Eug. Visa	Asupra unui nou simbol utilizabil în domeniul teoriei numerelor	44
9. V. Thébault	Remarque sur des carrés curieux	55
10. A. Gloden	Sur les règles de divisibilité par 9 et par 11, dans le system de numeration décimal	56
13, 15, 19, 22 25 Gh. Buiclin	Numere interesante cu cifre diferite	80, 92, 117, 129, 140

b) Algebra.

5. Gh. Vasiliu	Stabilirea ecuaţiei probabilităţei erorilor	33
11. Gh. Constantinescu	Soluţiunile întregi ale ecuaţiunei: $x^2 - a_1^{2p_1+1} a_2^{2p_2+1} \ldots a_k^{2p_k+1} y^2 = 1$ când se cunoaşte o singură soluţie a ecuaţiei: $x^2 - a_1 a_2 \ldots a_k y^2 = 1$	68
12. A. Gloden	Sur l'équation diophantienne: $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ (en nombre entiers)	79
13. A. Gloden	Solution générale en nombres entiers de l'équation: $x^4 + y^4 + z^4 = x'^4 + y'^4 + z'^4$ avec les conditions: $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ . . .	80
16. A. Gloden	Solution général de: $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2$ si l'on a $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$.	93
17. A. Gloden	Sur une relation quintigrade	104
18, 21. V. Alaci	Generalizarea problemei 1426	105, 118
24. M. Ghermănescu	Asupra unei identităţi . . .	132
26. A. Gloden	Sur une méthode de formation des égalités multigrades $a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots$ $(p = 1, 3, 5 \ldots 2n+1)$ . .	141

c) Geometrie.

14. V. Thébault	Sur le triangle isoscêl . . .	91
20. V. Thébault	Sur le quadrilatère complet	118

d) Trigonometrie.

4. N. N. Mihăileanu	Relaţii de trigonometrie . .	31
8. I. C. Savin	Asupra unur identităţi trigonometrice	45
23. A. Gloden	Identités renfermant des fonctions trigonométriques des angles d'un triangle établies par des intégrations . . .	130

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

IV. BIBLIOGRAFIE.

Pag

Pl. Andronescu Das Problem der Dimensioder Einheiten elektrischer u. magnetischer Grössen 10, 47

Th. Anghelută Sur l'intégrale de *M. Denjoy* 70

Boletin Matematico 10, 35, 47, 81, 94, 118

Bulletin de Mathématique et de Physique. pure et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest 81

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 107

Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara 82

I. Cristescu Valoarea nisipurilor petrolifere 95

V. Cristescu Culegere de probleme de Trigonometrie 81

Godofredo Garcia Vitesa şi acceleraţia totală în coordonate absolute . . . 35

Godofredo Garcia El problema de los dos cuerpos en la Espacio Tridimensional en la teoria clasica 95

Godofredo Garcia La metrica en un Espacio N. Dimensional 95

Gazeta Matematică 9, 24, 35, 47, 56, 81, 94, 107, 118, 132, 141

Gazeta Matematică supliment cu exerciţii 10, 24, 47

D. Germani Lois de similitude et structure des formules dans l'étude des machines éléctriques 142

Gh. Th. Gheorghiu Sur les coefficients de la factorielle et sur deux classes de polynomes harmoniques 82

Gh. Th. Gheorghiu Generalizarea formulelor trigonometrice dintr'un triunghiu în domeniu complex 82

M. Ghermanesco Sur le thèorème de *Picard-Borel* 10

M. Ghermanesco Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions algébroides 10

M. Ghermănescu Curs de algebră superioară 10

M. Ghermanesco Sur une classe d'équations algébriques 132

M. Ghermănescu Memoriu de titluri lucrări, 1937 142

M. Ghermănescu Sur les fonctions *n*-Métaharmonique 142

A. Gloden Asupra identităţilor numerice 35

Caius Iacob Sur un jet gazeux 107

Caius Iacob Memoriu de titluri şi lucrări, 1937 142

Caius Iacob Asupra probabilităţii pe care o are un elev de a fi admis la un examen . . . 142

Caius Jacob Etude d'un jet gazeux . . 142

Constantin Kiritescu Problema „Educaţiei Dirijate", în legătură cu suprapopulaţia universitară şi şomajul intelectual . . . 142

I. Lepşi Buletinul Muzeului Naţional de Istorie Naturală din Chişinău 119

I. Linteş Calculul teoretic al vieţei gurilor de foc 10

I. Linteş Practica rezolvării problemelor de Balistică Interioară 10

I. Linteş Discuţiuni asupra stabilităţii unui material de Artilerie Pag. 10

I. Linteş Eforturile suportate de un avion pe timpul resursei 10

I. Linteş Problema ascultării în apărarea contra aeronavelor . 10

I. Linteş Apărarea aerului 10

Mateescu Şt. Vulcanismul cuaternar din partea de Nord-Vest a Banatului 119

Mathematica 9, 10, 132

Micul Matematician 10

A. Myller Curs de Geometria Analitică p. cl. VIII, şt. . . 95

Al. V. Niculescu Courbes sphériques de M. *Tzitzeica* 82

Al. V. Niculescu Une classe de courbes gauches 82

Numerus 47, 70, 94, 118

Philosophie des Mathématiques 81

Pitagora Revista Colegiului Carol I., Craiova 94, 107

Revista Cercului de Studii al Şcoalei P. T. T. 10, 24, 47, 70, 81, 119, 132, 141

Revista de Ciencias 35

D. Russu La loi de rotation des corps célestes 132

P. Sergesco Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry 10

P. Sergesco Sur quelques aspects des Mathématiques contemporaines 10, 56

P. Sergesco Les Mathématiques dans le journal des Savants . 10, 57

Societatea Română de Ştiinţe 119

Sphinx anul VI, No. 5 47

Ştiinţă şi Progres 10, 35, 47, 56, 107, 118, 141, 142

M. Stamatiu et C. C. Teodoresco Quelques propriétes physiques et mécaniques du sel gemme roumain 107

The American Mathematical Montly 70

V. Thébault Mélanges Mathématique: Géométrie du tétraèdre et théorie des nombres . . 70

V. Thébault Triangle bordé de rectangle 70

V. Thébault Sur le tranchet d'Archimède 70

V. Thébault Sur une nouvelle sphère associée au tétraèdre . . . 82

C. C. Teodoresco La réception des rails et l'application pratique des résultats obtenus 107

N. Théodoresco La derivée aréolaire . . . 119

O. N. Ţino Algebră elementară p. cl. IV 119

Gh. Gh. Vasiliu Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer Koordinaten 57

T. Vescan Axiomatica numerilor întregi 82

T. Vescan Elementele teoriei gazelor electronice 95

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Şcoala Politechnică din Timişoara. Examen de intrare în anul pregătitor. Octomvrie 1936 . . 106

VI. DIVERSE INFORMAŢIUNI.

Şedinţele Societăţii Ştiinţifice de la Şcoala Politechnică din Timişoara 47

Şedinţele Asociaţiei Profesorilor de Matematici din Timişoara 48

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XVI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	
50	110	„	
54	126	„	119
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
99	187	„	57
100	14	II	
109	14	„	82
110	14	„	
114	30	„	142
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
154	78	„	83
164	94	„	
165	94	„	120
174	110	„	48
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
185	126	„	
186	142	„	95
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
243	46	„	95
244	46	„	
248	46	„	132
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	

1)	2).	3).	4).
335	14	IV	70
336	14	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
489	126	„	
507	158	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI	107
528	14	„	11
531	14	„	
	122	IX	
535	30	VI	
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	142
562	78	„	
569	94	„	

1).	2).	3).	4).
606	174	VI	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
628	38	„	108
	112	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	57
646	70	„	84
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
657	102	„	58
658	102	„	
667	134	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
823	48	IX	
832	60	„	
847	84	„	
851	96	„	
853	96	„	
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
916	48	„	133
923	60	„	
924	60	„	
929	72	„	
938	84	„	
939	84	„	
951	107	„	35
953	107	„	
954	108	„	
956	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
974	138	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	

1).	2).	3).	4).
1000	36	XI	
1001	36	„	
1002	36	„	
1008	48	„	
1009	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1023	72	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1046	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1113	60	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1141	96	„	
1142	96	„	
1145	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	

1).	2).	3)	4).
1205	48	XIII	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1263	132	„	
1266	132	„	
1267	141	„	58
	12	XIV	
1268	141	XIII	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1274	12	„	
1275	12	„	
1279	12	„	
1280	24	„	
1281	24	„	
1282	24	„	
1289	36	„	
1290	36	„	
1291	36	„	
1292	36	„	
1294	36	„	
1295	36	„	
1296	52	„	
1297	52	„	
1298	52	„	
1299	52	„	
1300	52	„	
1305	64	„	85
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	

1).	2).	3).	4).
1319	76	XIV	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	
1327	88	„	
1329	100	„	24
1331	100	„	
1333	100	„	
1334	100	„	
1337	112	„	49
1341	112	„	
1343	112	„	12
1345	124	„	25
1346	124	„	26
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1356	136	„	13
1357	136	„	
1359	136	„	13
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1368	148	„	36
1369	12	XV	37
1370	12	„	
1371	12	„	
1372	12	„	
1373	12	„	27
1374	12	„	50
1375	12	„	15
1376	12	„	37
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1381	24	„	38
1382	24	„	27
1383	24	„	50
1384	24	„	39
1385	36	„	
1386	36	„	
1387	36	„	
1388	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1392	36	„	59
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1397	48	„	51
1398	48	„	
1399	48	„	60

1).	2).	3).	4).
1400	48	XV	60
1401	60	„	61
1402	60	„	
1403	60	„	96
1404	60	„	62
1405	60	„	
1406	60	„	
1407	60	„	
1408	60	„	62
1409	72	„	71
1410	72	„	62
1411	72	„	72
1412	72	„	72
1413	72	„	
1414	72	„	
1415	72	„	73
1416	72	„	74
1417	84	„	74
1418	84	„	85
1419	84	„	
1420	84	„	75
1421	84	„	85
1422	84	„	
1423	84	„	
1424	84	„	86
1425	96	„	87
1426	96	„	108
1427	96	„	
1428	96	„	
1429	96	„	87
1430	96	„	
1431	96	„	97
1432	96	„	97
1433	107	„	109
1434	108	„	110
1435	108	„	
1436	108	„	
1437	108	„	
1438	108	„	
1439	108	„	98
1440	108	„	111
1441	120	„	98
1442	120	„	
1443	120	„	
1444	120	„	98
1445	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1448	120	„	120
1449	132	„	121
1450	132	„	
1451	132	„	121
1452	132	„	122
1453	132	„	122
1454	132	„	

1).	2).	3).	4).
1455	132	XV	
1456	132	„	123
1457	144	„	
1458	144	„	
1459	144	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1462	144	„	123
1463	144	„	134
1464	16	XVI	135
1465	16	„	
1466	16	„	
1467	16	„	
1468	16	„	135
1469	16	„	
1470	16	„	
1471	16	„	145
1472	28	„	
1473	28	„	
1474	28	„	
1475	28	„	
1476	28	„	146
1477	28	„	
1478	28	„	
1479	28	„	
1480	28	„	145
1481	40	„	
1482	40	„	
1488	40	„	
1484	40	„	146
1485	40	„	
1486	40	„	
1487	40	„	146
1488	40	„	
1489	52	„	
1490	52	„	
1491	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1495	52	„	
1496	52	„	
1497	64	„	
1498	64	„	
1499	64	„	
1500	64	„	
1501	64	„	
1502	64	„	
1503	64	„	
1504	64	„	
1505	76	„	
1506	76	„	
1507	76	„	
1508	76	„	
1509	76	„	

1).	2).	3).	4).
1510 .	76 .	XVI	
1511 .	76 .	„	
1512 .	76 .	„	
1513 .	88 .	„	
1514 .	88 .	„	
1515 .	88 .	„	
1516 .	88 .	„	
1517 .	88 .	„	
1518 .	88 .	„	
1519 .	88 .	„	
1520 .	88 .	„	
1521 .	100 .	„	
1522 .	100 .	„	

1).	2).	3).	4).
1523 .	100 .	XVI	
1524 .	100 .	„	
1525 .	100 .	„	
1526 .	100 .	„	
1527 .	100 .	„	
1528 .	100 .	„	
1529 .	112 .	„	
1530 .	112 .	„	
1531 .	112 .	„	
1532 .	112 .	„	
1533 .	112 .	„	
1534 .	112 .	„	
1535 .	112 .	„	

1).	2).	3).	4.)
1536 .	112 .	XIV	
1537 .	124 .	„	
1538 .	124 .	„	
1539 .	124 .	„	
1540 .	124 .	„	
1541 .	124 .	„	
1542 .	124 .	„	
1543 .	124 .	„	
1544 .	124 .	„	
1515 .	124 .	„	
1546 .	136 .	„	
1547 .	136 .	„	
1548 .	136 .	„	

1).	2).	3).	4.)
1549 .	136 .	XVI	
1550 .	136 .	„	
1551 .	136 .	„	
1552 .	136 .	„	
1553 .	136 .	„	
1554 .	147 .	„	
1555 .	147 .	„	
1556 .	148 .	„	
1557 .	148 .	„	
1558 .	148 .	„	
1559 .	148 .	„	
1560 .	148 .	„	
1561 .	148 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1, 82, 132.
Abramescu N., 1, 10, 24, 35, 40, 98, 132.
Adam I. M., 48, 95.
Adam D. R, 1.
Adamescu M., 1.
Agapescu M. N., 95.
Alaci V., 1, 3, 9, 13, 16, 17, 24, 27, 28, 29, 35, 36, 40, 41, 47, 48, 52, 53, 56, 59, 64, 65, 72, 76, 77, 82, 88, 89, 100, 101, 106, 108, 111, 112, 113, 118, 123, 124, 125, 132, 136, 137, 142, 147, 148.
Aldea N., 95.
Alexandrescu P., 14.
Alexiu I., 107.
Amărăşteanu F. M., 13, 14, 16, 24, 27, 37, 38, 39, 40, 50, 51, 52, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 85, 86, 87, 88, 95, 97, 99, 100, 109, 110, 111, 112, 120, 121, 122 123, 124, 135, 136, 144, 145, 146, 147.
Ampère A. M., 81.
Anastasiade I, 1.
Andronache V., 50, 97.
Androneccu Pl., 1, 10, 47, 124.
Andrunachievici Vl., 30, 39, 50, 63, 72, 73, 74, 75, 86, 87, 98, 100, 110, 112, 122, 123, 135, 144, 146.
Angelescu A., 1.
Angelescu N. Tr., 48, 71, 95.
Angheluţă Th, 1, 70, 132.
Antoniu S. I., 47.
Antoniu V., 107.
Apostol G N., 16, 27, 50, 75, 85, 87, 109, 122.
Apostol R., 87, 97, 123, 147.
Appel P., 55.
Appert A., 10.
Arcadean P. N., 95.
Archimede 70.
Archipescu M. C., 135.
Ardelean Şt, 1.
Arghir I., 1.
Aristotel, 81.
Arsene A, 71, 108.
Atanasiu I. D, 95.
Avram I, 71.

B. I. B., 94.
Babeţiu Corneliu, 144.
Bâcicov B., 134.
Bădescu R, 47.
Baidaff B. I, 1, 10, 35, 81, 94, 118.
Bakony C, 1.
Balaban I. Gh., 58.
Balaban N., 95.
Balazs D, 1.
Balea I. M., 35.
Bălean G., 95.
Bănărescu M., 1.
Banciu I, 1.
Bănulescu M., 107.
Barbilian D., 10, 47, 56, 81.
Bărbulescu C. T., 136.
Bărglăzan A., 1, 95.
Baron C., 1.
Baumgartner I. I., 38, 50, 135.
Becker A., 81.
Begu I. Şt., 50, 72, 87, 99.
Bejenaru G. V., 50, 61, 72.
Beju I. Şt., 61, 62.
Beju Tr, 48, 95.
Beldie N. D, 71, 95.
Beleş A., 82.
Berardo B., 95.
Bercovici S., 71.
Berdan C., 49, 95.
Berinde T., 16, 28, 37, 38, 39, 40, 50, 61, 62, 63, 72, 75, 86, 87, 97, 98, 109, 110, 112, 121, 122, 135, 136, 147.
Bernstein M., 78.
Beschea G. N., 49, 95, 108.
Bessel, 10.
Bianu B, 82.
Biernacki M., 132.
Birckenmayer Al., 10.
Blaha N., 78.
Blaschke W., 132.
Blaşian V., 1.
Blumenfeld M D., 95.
Bobârnac M., 1, 48, 49, 95.
Bobordea I., 61, 72, 75, 85, 97.
Boerescu G., 37, 134.
Boitan P. N., 72.
Boldescu P., 107.
Bonea I., 1.
Borel, 10.
Borneanu G., 56.
Bosie V., 71.
Boşoldea G. Gr., 75.
Botea N. G., 1, 71, 85, 107, 133, 143.
Botez M., 1.
Botez M., 1, 62, 75, 112.
Botiş V., 48, 49, 132.
Bouligand G., 81, 132.
Boyle, 57.
Brahma, 10.
Brăileanu Al., 48.
Bratu Gh., 1, 9.
Breazu D., 1.
Bucur N. N., 24.
Bucur I. V., 38.
Bucur N. V., 50, 61, 63, 72, 74, 75, 87, 97, 98, 109, 120, 123.
Bucurescu I., 58.
Buicliu Gh., 1, 10, 16, 24, 28, 35, 40, 49, 52, 58, 64, 71. 74, 79, 81, 84, 85, 88, 93, 96, 100, 107, 112, 118, 124, 130, 136, 141, 147, 148.
Bujoreanu V., 134.
Buşilă A. Ad., 48.
Buşilă I., 132.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Butlewschi Z., 132.
Buzincu I. I., 14.

Calapso R, 10.
Călniceanu C., 1.
Călugăreanu G., 132.
Cândea C, 1, 82, 120.
Capriel H., 132.
Caracaş I. Gh., 71.
Catalan, 118
Catona V., 1.
Cauchy, 107.
Cazacincu A. V., 95.
Cazanacli V, P, 13, 14, 16, 27, 28, 37, 38, 39, 40, 50, 51, 52, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 72, 73, 74, 75, 85, 86, 87, 88, 97, 98, 109, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 123, 135, 136, 144, 145, 146, 147.
Cerchez Th. V., 82.
Chiriac I. S., 16, 39, 50, 61, 63, 72, 73.
Chiriţa G, 56.
Chiriţa M. M., 16.
Chirvai I. V., 27, 38, 50, 62, 63, 72, 73.
Ciobanu Ioan, 142.
Cioc I. D., 39, 50, 61, 63, 72, 75, 87, 97, 122, 123, 135, 136, 144, 146
Ciorănescu I. C., 49, 71, 95.
Ciorănescu N., 9, 82, 107, 132.
Cinca I. I., 61, 63, 74, 87, 97, 98.
Claudian V, 1, 70.
Coca A., 1.
Cocorandu M., 95, 133.
Cocoş B., 56.
Codreanu J. Tr., 47, 119.
Cojocaru V. I., 76.
Coman A., 1.
Comănescu A., 1.
Comăncscu-Bălteni 133.
Comberousse, 79.
Comloşan Cornelia, 144, 145, 146, 147.
Constantinescu C. C., 50, 52, 72, 73, 75, 122.
Constantinescu G. G, 1, 10, 41, 95, 96, 107.
Constantinescu Gh., 1, 4, 17, 35, 52, 64, 67, 70, 101, 105, 113.
Constantinescu I., 82.
Constantinescu V., 146.
Conta V., 118.
Contrea A, 1.
Coşereanu Gh. Gh, 71.
Coşereanu I., 48, 95.
Coşniţă C., 58, 70, 71, 95, 108, 143.
Coşniţă V., 95.
Costăchescu D. C., 1, 136.
Costăchescu V. C., 16, 60, 143.
Costin M., 82.
Cotescu C., 16, 39, 52, 61, 62, 63, 73, 74, 75, 87, 97, 98, 109, 144.
Craiu N. I., 58.
Creţoiu A., 95.
Cristea G. E., 112, 123.
Cristescu I., 1, 95.
Cristescu V., 56, 81, 95.
Cristodulo N, 1.
Crivăţ I., 134.
Cruţescu Trotus, 75.
Cserveny I., 1.
Csilcser E., 48.
Curcă G. C., 75, 122.
Curea I., 124.

Damsker D, 27.
Dângă S. V., 95.
Danielescu I. Al., 50.
Darboux, 132.
Darmois, 132.
Dăscălescu H. R., 136.
David Gh., 95.
Davidovici P., 136, 144, 145, 146.
Deceanu G, 37, 39, 98.
Deciulescu D. Gh., 144.
Demetrescu Gh., 1.
Denjoy, 132.
Déprez J., 66.
Descartes, 4, 48.
Destouches J. L., 81.
Diaconescu N., 1.
Diaconescu V. T., 95.
Dimitrescu A. M., 96.
Dimitriu Gh. St., 108.
Dinescu F. L., 71.
Dinu S. D., 71, 108.
Diophante, 10.
Dive P., 10.
Dobrescu P., 14, 27, 37, 38, 50.
Dobrin V., 52, 72, 75, 98.
Dobriţescu D. C., 75.
Dobromirescu P., 108.
Dobrozemsky M., 1.
Dolban Gh, 61, 72, 75, 85.
Dorneanu S. V., 96.
Drăgan G., 71.
Dragomirescu B. E., 95.
Dulămiţă I, 75.
Dulămiţă Gr. T., 61, 72, 109.
Dumitrescu Gral, 9.
Dumitrescu T. E., 108.
Dumitrescu G. N, 96, 107.
Dumitrescu C. P., 14.
Dumitrescu Al. V., 75.
Dumitriu Dada I., 1.

Einstein, 47.
Enescu D. V., 14.
Enneper d', 4.
Epure T. St., 130.
Errera A., 9, 10.
Euclid, 10, 107.
Euler, 4, 5, 28, 77, 78.

Farny, 24.
Feneşan I., 96.
Feuerbach, 77, 79.
Filipescu Gh., 82.
Filipescu Em. Gh., 24.
Fistie G., 47.
Floareş I. Ad., 75, 135.
Floareş I. M., 108.
Flickstein I., 95.
Florea C. Al., 96.
Florescu Gh. H., 24.
Florescu B. I., 35.
Florescu M., 1.
Florescu L. V., 37, 38, 40, 50, 52, 61, 63, 72, 73, 74, 75, 85, 87, 97, 98, 99, 109, 110, 120, 121, 122, 123, 135, 136, 144. 145, 146, 147.
Focşeneanu I M., 35, 48.
Fouret, 53, 54.
Frătici I., 1, 71.
Fréchet M., 10.
Fredholm, 9.

Gabrielescu C. V., 95, 96.
Garcea G., 35, 95, 132.
Gataianţu V. B., 96.
Gavăt I, 82.
Gavrilescu N. C., 14.
Georgescu C., 52, 95.
Georgescu D, 1, 124.
Georgescu J, 96.
Georgescu I. N. V., 49, 71, 95, 96, 120.
Gérardin A. M, 125, 126.
Gergonne, 65, 77.
Germani D., 82, 142.
Gerono, 29.
Ghelber M., 71.
Gheorghe M, 108.
Gheorghiu H. A, 75.
Gheorghiu Com. G., 96.
Gheorghiu Th. Gh. Dr., 24.
Gheorghiu Th. G., 57, 71, 81, 82, 95, 96, 132.
Gheorghiu Olimpia, 95.
Gheorghiu I. S., 82.
Gheorghiu V., 1.
Ghermanescu M., 2, 9, 10, 47, 109, 132, 136, 140, 142, 148.
Ghica Al., 107.
Ghimicescu I. Gh., 96.
Ghiocel V., 60
Ghişoiu P, 58, 96.
Ghiţescu Sp, 2.
Ghiţescu V., 48, 120.
Gloden A., 35, 56, 76, 80, 81, 94, 98, 105, 123, 124, 131, 135, 141, 148.
Godeanu Ig. V., 14, 16, 37, 38, 39, 50, 52, 60, 61, 62, 63, 64, 72, 73, 74.
Goldstein N., 71.
Gonzales O. M., 47, 81, 94, 119.
Goormaghtigh, 24, 66, 79.
Gonseth F., 81.
Grabovschi F. E., 27, 37, 61, 75, 88, 95, 97.
Grabovschi F. M., 87.
Gradin I. Gh., 71.
Grigorescu L. I., 96.
Grofşoreanu I. Gh., 96.
Grumăzescu M., 2, 9, 10, 47, 109, 132, 136.
Grünbaum M., 143.
Grünfeld B. M., 95.
Guibert A., 30.
Gulian M., 48.
Guţu Al. 82.

Hangan D., 82.
Haret Spiru, 47, 70.
Heber, 82.

Herman Al. V., 73, 75, 87, 88, 97, 98, 110, 121, 123, 135, 136, 144, 146.
Hermite, 132.
Herschovici E., 95.
Hompola Tib, 13, 16, 24, 27, 37, 38, 39, 50, 52, 62, 63.
Hostinsky B., 9.
Hristea H., 2.
Humbert P., 10.
Hurmuzescu, 9.

Iacob C., 10, 48, 53, 107, 126.
Iacob Şt. E., 96.
Ioachimescu A., 13, 24, 82, 95, 127.
Ioanovici A., 56.
Iliescu Gh., 118, 132.
Ionescu Aug., 96.
Ionescu-Biss H. P., 2.
Ionescu C. Bujor, 2, 24, 28, 71, 96, 132, 143.
Ionescu-Ţiu D. C., 2, 64, 100, 107, 108, 112, 136, 148.
Ionescu D., 14, 38, 50, 61, 62, 63, 74, 75, 87.
Ionescu V. D., 87.
Ionescu Gh., 49.
Ionescu I, 3, 56, 81, 95, 118, 119, 132, 141.
Ionescu I. P., 71, 96.
Ionescu Siseşti, 9.
Ionescu C. Şt., 136.
Ionescu Gh. V., 108.
Ioniţă M. I., 48.
Iordache N. I., 49, 95.
Iordan I., 10.
Iorgulescu T., 2.
Isac C. D., 14.
Iuga G., 10.
Ivănescu C., 12, 39, 42, 61, 64, 73, 97.
Ivanissevich L., 118.

Janet G., 119, 142.
Jarda R., 72.
Jaskovschi, 81.
Jerabek, 66.
Jidanu I. C., 99, 109, 112, 136, 144, 146.
Jojea N., 96.
Juvet G, 81.

Karamata J., 9.
Kassargian A., 95.
Katz P, 48, 95, 96.
Kampisty St., 9.
Kielburger M, 2.
Kiriţesco Constantin, 142.
Kirschniok, 47.
Koenig, 53, 55.
Kornis E., 135, 136, 144, 145, 146, 147.
Kreïtschik M., 22, 125.
Kühn I., 2.

Lagrange, 4, 5, 6, 91.
Lalescu Tr., 3, 47, 94, 119, 142.
Lambrino Gh., 2.
Lascu Bal, 88, 147.
Lăţea C., 134.
Laţiu V., 2.
Lautmann Al., 81.
Lazar A., 75, 135.
Lazăr Gh., 35, 47.
Lăzărescu St, 38, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 85, 87, 91, 123, 135, 147.
Lăzărescu F. St., 48.
Lebesgue H., 132.
Legendre, 9.
Leibniz, 81.
Leja F., 9.
Leonida D., 2, 48.
Leonescu, 94.
Lepădatu I. M., 71, 96.
Lepşi I., 119.
Lindberg L., 133.
Linteş I., 2, 10, 82, 95, 118, 141.
Liouville, 9.
Liteanu Gh, 2, 56.
Longinescu A. N., 95.
Longinescu I. N., 142.
Lozicu I., 14.
Luchian C., 24.
Lupescu G. C., 14, 16, 39, 50, 52, 61, 62, 63, 97, 100, 109, 110, 121, 122, 123, 134, 135, 136, 144, 145, 146, 147.
Lupescu Gh. L., 24, 38, 50, 61, 87, 88, 95, 99.

Macovski E., 2, 82.
Maftei M. C., 112.
Măgală I. G., 14.
Magheru I., 2.
Mandelbrojt, 9.
Mania B., 81.
Manoil E., 71, 96.
Manolescu I. N., 48, 84, 107.
Manughevici C., 2, 82.
Marcovici H., 96.
Mardan D, 2.
Mareş I. C., 48.
Margalius M, 95.
Mărgineanu I., 40, 76, 86, 99, 122, 134.
Marian V., 35, 47, 56, 118, 132
Marica I. H, 14, 16, 37, 39, 50, 52, 62, 64, 72, 73, 75, 85, 88, 97, 98, 99, 100, 120, 121, 122, 123, 124.
Marica Pompeiu, 13, 14, 16, 27, 37, 38, 50, 61, 63, 64, 72, 73, 87, 97, 98, 109, 120, 121, 122, 123, 144, 145, 146, 147.
Marineanu Tr., 134.
Marinescu I., 2.
Marinescu M., 82, 95.
Marinescu Tr., 96.
Mariotte, 57.
Marteş V. Gr., 72.
Măru D, 95.
Maşcaş Gh. P., 52, 61, 62, 75, 85, 87, 109, 136.
Mateescu C., 82.
Mateescu S., 2, 119.
Matei D. D., 16, 38, 39, 50, 52, 60, 61, 62, 63, 64, 72, 73, 74, 75, 85, 86, 87, 97, 98, 100, 110, 111, 120, 121, 122, 123, 124, 135, 136, 144, 146, 147.
Matei D. V., 62.
Măţieş V. I., 9, 81, 121.
Medeleanu I., 144, 147.
Mehlmann T., 95.
Mereuţă Em., 62.
Meta M., 14.
Miclescu A., 49, 95, 96, 133.
Micula O., 108.
Mihăescu D. C., 49, 95.
Mihai Em., 2, 48.
Mihăileanu N. N., 2, 28, 32, 35, 40, 49, 52, 71, 77, 81, 91, 96, 100, 107. 108, 119, 133, 134, 136, 143, 144, 146, 148.
Mihăilescu T. R., 96.
Mihalcea I. O., 59.
Mihalcea N. N., 13, 14, 16, 24, 38, 39, 50, 52, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75.
Mihalcea V. V., 50.
Millea G. E., 13, 14, 16, 52, 60.
Miloia I., 2.
Milu I. N., 24, 37, 61, 93, 74, 75, 87, 144.
Mioc V., 2.
Miquel, 11, 81, 118.
Mirescu A. P., 96.
Mişca C. K., 72, 75, 110, 122.
Miu M. I., 96.
Mocanu N. V., 75.
Moessner A., 119.
Moisă I. G., 38, 50, 52, 61, 62, 63, 72, 73.
Moisovici St., 16, 24, 37, 38, 39, 50, 52, 62, 75, 85, 87, 121, 122, 136, 144, 146.
Montel P., 9.
Moroianu I. A., 96.
Motoc D. M., 134.
Motoc R., 14.
Munteanu V. L., 50, 61, 72, 95, 97.
Murăroiu I., 96.
Murgu M., 14, 16, 24, 27, 37, 38, 39, 50, 52, 62, 63, 72, 73, 75, 87, 88, 97, 98, 110, 112, 121, 122, 123, 124, 136, 144, 145, 146, 147.
Murgulescu Elena, 2.
Murgulescu Gh. I., 2.
Muscinski G., 75, 87.
Musta S., 71, 96.
Myller A., 95, 139.

N. O. Z., 107.
Nadaşan St., 2.
Nagel, 65, 77, 79, 108.
Naneş Cornelia, 14, 24, 28, 72, 121.
Naneş Gh., 2, 10.
Năstase M., 35.
Nedelcu V. N., 76, 85, 109.
Nedelea V. O., 87.
Negrea A. L M., 13, 14, 16, 24, 28, 36, 38, 36, 40, 50, 51, 52, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 85, 86, 87, 97, 98, 100, 109, 112, 120, 121, 122, 123, 124, 135, 136, 114, 145, 146 147.
Negulescu D. St, 60, 61, 62, 63, 76, 85, 87, 98, 99, 109, 110, 121, 123, 135, 136, 144, 146, 147.
Negulescu D. M., 145.
Negulescu V., 147.

Nenițescu D., 82.
Nestor G. D., 96.
Nestorescu M., 112.
Neuberg J., 66.
Neumann M., 107.
Newton, 119.
Nichifor Gh., 2.
Nicolaescu Ct., 62.
Nicolaescu P. I., 133.
Nicolau A., 2.
Nicolau C., 24, 96.
Nicolau M., 119.
Nicolau P., 2, 82.
Nicolescu Al, 10.
Nicolescu Ct., 61.
Nicolescu P. V., 71.
Niculescu V. Al., 35, 132.
Niculescu Gh. 2, 24, 118.
Niculescu Is., 49.
Niculescu M., 2, 9, 82, 107.
Nikodym O., 9.
Nikodym St., 9.
Novacu A. V., 96.

Ogrin N., 2.
Olariu T. E, 71, 136, 144.
Onicescu O., 2, 118.
Orășanu Gr., 2.
Orășeanu C., 2.
Orbonaș I., 95.

Pădureț I. V., 38, 135, 136.
Pădureț A. V., 144, 146.
Painvin, 139, 140.
Pambucdjian Kr., 14, 38, 76, 87.
Pană P., 24.
Panait M., 37, 39, 52, 76, 99.
Panaite N. T., 108, 143.
Pantazi A., 9, 107, 132.
Papadopol C. C., 71.
Pârvu A., 58.
Pasăre S. A. E., 76.
Pașca V., 71.
Pascal 3, 71.
Pascu B, 71.
Patriciu V., 48.
Pătroianu I. M., 11, 96, 133.
Pauli N., 48.
Pavel D., 82.
Percea V., 71, 96.
Petrescu A., 2.
Petrescu-Craiovița An., 14, 37, 39, 50, 52, 61, 62, 63, 72, 76, 87, 136, 144, 145, 146, 147.
Petrescu P. G., 133.
Petrovich M., 9.
Petrulian N., 49, 96.
Picard, 10.
Pincu K., 133.
Pitagora, 10, 94.
Podariu Al., 49, 71, 107.
Pompeiu D., 9, 54, 82, 107.
Pop Al, 10.
Popa C. B., 76.
Popa B. I, 74.
Popa Gh. I., 96, 134.
Popa I. I., 132.
Popa N., 14, 16, 24, 37, 38, 39, 50, 52, 61, 62.
Popea Gh. O., 95, 96.
Popescu Ad., 15, 51, 83, 106, 112.
Popescu E, 2.
Popescu I., 2, 48, 118, 133.
Popescu Iancu, 49.
Popescu Ion, 24.
Popescu M. I., 71.
Popescu N. Maria, 14, 16, 27, 37, 39, 50, 52, 61, 62, 63, 72, 73, 75, 86, 87, 97.
Popescu D. Stelian, 143
Popescu V, 49.
Popescu C. V., 107.
Popescu Z., 147.
Popovici C. Al., 14.
Popovici C., 9.
Popovici C. C., 96.
Popovici A. G., 122.
Popovici I. G., 27, 39, 50, 87, 100, 109, 110, 122, 123, 124, 135, 136, 144.
Popovici M., 108.
Popovici Th. I. 49, 95, 96, 133.
Popovici Tib, 9, 10, 49, 81, 107, 132.
Popp I. E., 96.
Popu Câmpeanu I, 35.
Pestelnicescu C. M., 14, 38, 40, 50, 51, 60, 61, 63, 71, 72, 73, 74, 76, 87, 88, 97, 98, 110, 120, 123, 135.
Predoescu I. M., 24, 37, 40, 60, 72, 109.
Propst J., 49.
Protopopescu I., 2, 12.
Pupăzan Ct., 14.
Purcariu I, 2.

R. J. S., 94.
Racliș N. R., 2, 70, 94 142.
Radu A., 112.
Rada D., 144, 146.
Rădulescu G. O., 14, 50, 61, 62, 64, 72, 73, 76, 87, 136, 144.
Rădulescu P. Șt., 96.
Rădulet R. S, 2, 11, 47.
Rajka Z., 27, 40, 62, 72, 76, 85, 99, 109.
Râmniceanu Gr. I, 143.
Râmniceanu I. C., 71, 108.
Râmniceanu R., 71.
Rang D., 136.
Rauch I, 52, 62, 76.
Răut C., 96.
Receanu M. C., 64, 72.
Reymond A., 81.
Riemann, 132.
Ripianu A, 135, 136, 144, 145, 146, 147.
Rizescu I., 136.
Roibănescu C, 2.
Roman I. I., 58 71, 108.
Roman I. N., 14, 75, 76, 112, 123.
Rosemberg I., 14, 40, 50, 61, 62, 72, 75, 85, 87, 97, 98, 99, 101, 110, 112, 120, 121, 122, 123, 136, 144, 146, 147.
Rosenblatt Al., 10.
Roșu Al., 132.
Rotta I. St., 14.
Rouché, 79.
Runceanu N. C., 14.
Russu D. C., 134.
Russu D., 132.
Russu I. E., 76, 85.
Ruzievicz Șt., 9.

Samoilă D., 96.
Sanielevici S., 9.
Sauciuc L., 2.
Savin C. I., 28, 40, 47, 50, 52, 71, 76, 85, 88, 108, 143, 145
Savin Marica, 26, 39, 50, 60, 97, 99, 121, 122, 123, 135, 144, 145.
Schileru I., 2, 24, 47, 49, 52, 70, 76, 148.
Schrecker P., 81.
Scripcă L., 49, 95, 96, 133.
Scodrano Al, 49.
Secară M. D., 50, 61, 62, 73, 97.
Secăroiu D., 96.
Segal L., 71.
Segal Zigu, 144.
Segre, 132.
Șeitan I., 71.
Șerban A., 71.
Șerban I. T., 71.
Șerbănescu I., 49.
Șerbănescu A. M., 14.
Sergescu P., 2, 9, 10, 48, 56, 57.
Severineanu C., 2.
Sierpinski, 9, 10, 132.
Sion Gh. I., 49, 71, 95, 96.
Silișteanu C. C, 71.
Simionescu Gh. D, 2, 11.
Simionescu D. Gh., 13, 82, 96, 133.
Simionov P. K., 49, 133.
Singh N A., 132.
Smighelschi O., 2.
Smolinski A., 124.
Solacolu S., 82.
Solomon N, 95.
Spacu Gh. P. 96.,
Spârchez Z., 71.
Spearman, 132.
Sprinceană C. Gh., 96, 108.
Stamatescu I., 2.
Stamatescu I. V., 95.
Stambuleanu A., 2, 82.
Stamate I., 144.
Stamatin I. M., 49, 71, 96, 107, 133.
Stan A., 2, 108.
Stăncescu C., 2, 57.
Stănciulescu G., 96.
Stănescu D., 49, 133.
Stănescu A. N., 96
Stănescu Milcov Nicolae, 141.
Stănescu R. N., 10.
Stantz I E., 2.
Stefănescu C., 38, 60, 61, 63, 72, 73, 74, 76, 83, 85, 87, 98, 99, 123, 135, 136, 147.
Stefănescu E., 95, 96.
Stefănescu D. N., 16, 50, 52, 61, 63, 72, 73, 76, 85, 86, 87, 97, 98, 99, 109, 110, 121, 122, 124, 144, 147.
Ștefănescu Saba, 82.
Ștefulescu I., 71.
Steiner, 66.
Stieltjes, 107.
Stoenescu I. Al., 49.
Stoica D. A., 96.

Stoica N. D., 14, 39, 52, 61, 62, 76, 87, 97, 98, 122.
Stoica P. I., 14.
Stoicescu L., 2, 47, 48.
Stoicescu M, 2.
Stoenescu D. M., 144
Stoilov S., 9, 132.
Stratilescu G. Gr, 24.
Stratilescu I. Gr., 82.
Suhov I, 2, 47.
Süli M., 96.

Tanasiciuc V. Cl., 13, 14.
Ţanovici V. C., 71.
Tărăbuţă C. P., 11, 49, 71, 95, 96, 133.
Tărăbuţă C., 142.
Ţarălungă D., 16, 37, 38, 52, 63, 76, 87, 98, 100, 122, 123, 135.
Taraş V., 96, 133.
Tarţia V. I., 108.
Tauber Al., 96.
Taylor, 9.
Tchakaloff, 9.
Tchaplıguine, 48.
Teodor D. I., 56.
Teodorescu C., 2, 3, 9, 10, 17, 29, 41, 47, 53, 65, 77, 89, 101, 107, 113, 124, 125.
Teodorescu M. D., 71.
Teodorescu N, 96, 119.
Teodorescu N. D., 144.
Teodorescu V. V., 14.
Teodoru H., 82.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 9, 10, 16, 23, 25, 28, 29, 30, 31, 35, 40, 44, 56, 65, 70, 80, 81, 82, 85, 87, 92, 107, 110, 118, 124, 125, 126, 135, 137.
Tica P. M. Gal, 14, 24, 62, 73, 97, 100, 110, 121, 122, 123, 124.
Ţigoiu Z. I., 71.
Tilică C. Şt., 135, 144, 145, 146, 147.
Timotin D, 49.
Ţino O., 2, 48, 112, 119, 132, 136.
Ţiţeica G., 3, 9, 10, 47, 70, 77, 82, 95, 107, 132.
Ţiţeica I. I., 14, 27, 38, 47, 50, 61, 63, 74, 98.
Toma N N., 62.
Tomescu G., 95.
Topliceanu C. C., 49.
Toporescu R. E., 82.
Toranzos F., 94.

Udrisky I., 96.
Ulmann Oc., 49.

Vâlcovici V., 2, 9, 54, 148.
Valiron G, 10.
Vântu Gr., 82.
Varga O., 132.
Vasilescu A. G., 14.
Vasilescu Karpen, 9, 82.
Vasilescu A. N., 95.
Vasiliu G., 34, 57, 71, 82.
Vasiliu Gh. Gh., 143.
Vasiliu Leoben Gh., 2, 58.
Vasiliu C. I., 11, 49, 96.
Vasiliu M., 142.
Vătăşan Ov., 49, 96, 133.
Vescan T. T., 56, 82, 95, 118.
Vetalani F. K, 10.
Vetter Q., 10.
Viciu A., 2, 124, 135, 136, 144, 146, 147.
Vieriu M. M. D., 76.
Virgil Gr., 71.
Vişa E, 24, 26, 28, 37, 45, 52, 64, 88, 135, 144.
Vlad I. C. M., 144, 145, 146, 147.
Vlad I. V., 2.
Vlădescu I., 2.
Vlaţiu L., 96.
Vleck Van, 48, 118.
Vodrisky T., 133.
Volberg M., 47.
Vycihlo F., 132.

Wazewski T., 9.
Weber M., 76.
Weiss A. E., 132.
Weiss L, 95
Weiss S., 71, 96.
Wilkosz W., 9.
Wolff Ch., 118, 132.
Wolkowitsch D., 139.

Zagaican I., 71, 97, 99, 103, 110, 112, 121, 135, 136, 144, 147.
Zăgănescu I., 2.
Zaharia N. O., 2, 119, 142.
Zamfirescu G. I., 71.
Zapan Gr, 2, 70, 118.
Zygmund A., 9.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVII, care începe la 15 Martie 1937.

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XVI-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie 1937, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMIȘOARA — VOL. XVI.

5 lei